Стержни в полусферической чаше

Задача 7. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 7] Гладкая полусферическая чаша неподвижно закреплена на столе так, что её ось симметрии вертикальна. В чашу последовательно кладут два тонких неоднородных стержня одинаковой массы и одинаковой длины, меньшей диаметра чаши. Первый стержень в положении равновесия образует с горизонтом угол α_1, а второй — угол $\alpha_2 < \alpha_1$. Затем стержни скрепляют друг с другом боковыми поверхностями так, что они образуют новый тонкий стержень прежней длины, и кладут получившийся составной стержень обратно в чашу. Какой угол с горизонтом будет образовывать в положении равновесия этот составной стержень?

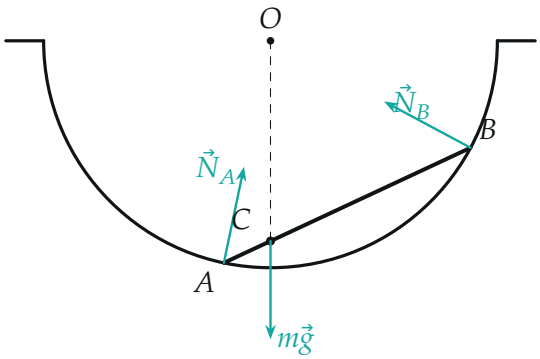


Рис. 1. Силы реакции $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ — по радиусам к O; центр масс C — на вертикали через O

▲ **Решение. Что происходит.** Стержень лежит в чаше, касаясь её двумя концами; чаша гладкая, трения нет, поэтому реакции в точках касания направлены по радиусам, к центру сферы. Стержень неоднородный, и угол, под которым он встанет, зависит только от того, где у него центр масс. Главная идея: в равновесии центр масс лежит на вертикали, проходящей через центр чаши; из этого угол выражается через смещение центра масс от середины стержня. Смещения у двух стержней складываются, и это даёт ответ. Класс задачи: равновесие тела под действием трёх сил.

Обозначения. R — радиус чаши, O — её центр (на уровне края), $l < 2R$ — длина стержня, A и B — концы стержня, M — его середина, C — центр масс, δ — расстояние MC, α — угол с горизонтом, $d = \sqrt{R^2 - l^2/4}$ — расстояние от центра O до стержня (для всех стержней одной длины оно одно и то же).

1. Условие равновесия. На стержень действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ (вертикально вниз из C) и реакции $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ (по радиусам AO и BO), рис. 1. Если тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил, их линии действия пересекаются в одной точке: иначе моменты относительно точки пересечения двух сил не уравновесили бы момент третьей. Линии $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ пересекаются в O — значит, и линия действия силы тяжести проходит через O: *центр масс стержня лежит на вертикали через центр чаши*. Стержень и ось чаши лежат поэтому в одной вертикальной плоскости.

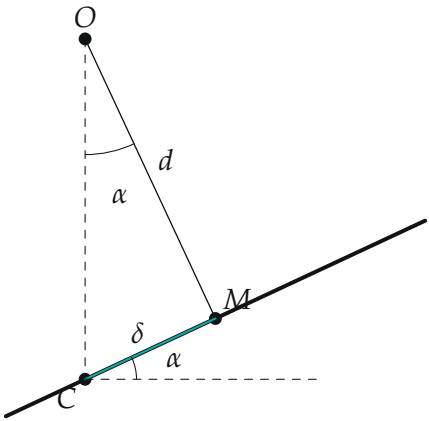


Рис. 2. Геометрия равновесия: $OM \perp AB$, $\angle MOC = \alpha$, $MC = \delta = d \operatorname{tg} \alpha$

2. Угол через положение центра масс. Концы стержня лежат на сфере, так что $OA = OB = R$ и треугольник OAB равнобедренный: отрезок OM перпендикулярен стержню и равен d (рис. 2). Вертикаль через O образует с OM угол α (стороны углов взаимно перпендикулярны: $OM \perp AB$, вертикаль $\perp$ горизонтали). Из прямоугольного треугольника

OMC ($\angle M = 90°$) находим

$$MC = \delta = d\ \mathrm{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\delta}{d}.$$

Центр масс смещён от середины к нижнему концу стержня: тяжёлая сторона внизу. Для любого стержня заданной длины в чаше угол однозначно определяется смещением δ центра масс от середины.

3. Два исходных стержня. Смещения (от середины, в сторону тяжёлого конца)

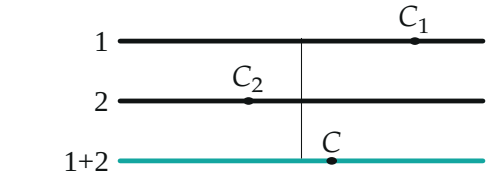
$$\delta_1 = d\ \mathrm{tg}\,\alpha_1, \qquad \delta_2 = d\ \mathrm{tg}\,\alpha_2.$$

4. Составной стержень. Склеенные стержни имеют общую длину l и массу $2m$. Центр масс системы двух тел равной массы — середина между их центрами масс (рис. 3). Возможны два способа склейки:

- тяжёлые части обоих стержней — у одного конца: $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$;
- тяжёлые части — у разных концов: смещения направлены противоположно, $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)$ (тяжёлая часть — у первого стержня, он смещён сильнее, $\delta_1 > \delta_2$).



тяжёлые части с одной стороны: $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$



тяжёлые части с разных сторон: $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)$

Рис. 3. Центры масс C_1, C_2 стержней и C составного; вертикаль — середина стержня

5. Угол составного стержня. Подставим в $\operatorname{tg}\alpha = \delta/d$ и сократим d:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta}{d} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 \pm \operatorname{tg}\alpha_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{tg}\alpha_1 \pm \operatorname{tg}\alpha_2}{2}\Big).$$

Знак «+» — тяжёлые части склеены с одной стороны, «−» — с разных. Радиус чаши и длина стержня в ответ не вошли: d сократилось.

Обратите внимание. Ответ имеет два значения, потому что задача не говорит, как стержни приложены друг к другу, а неоднородные стержни можно склеить двумя способами. Знак «−» при $\alpha_2 < \alpha_1$ даёт угол между нулём и α_1; тяжёлая сторона составного стержня — та, где тяжелее первый стержень.

Устойчивость. Равновесие устойчиво: высота центра масс над точкой O при повороте стержня на угол φ равна $-\sqrt{d^2+\delta^2}\cos(\varphi-\alpha)$, и положение $\varphi = \alpha$ — единственный минимум потенциальной энергии, к нему стержень и возвращается.

Проверка. Если стержни одинаковы ($\alpha_1 = \alpha_2$) и склеены тяжёлыми концами вместе, получается тот же угол α_1: $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_1) = \operatorname{tg}\alpha_1$. Если одинаковые стержни склеены разными концами, составной стержень однороден по смещению центра масс: $\delta = 0$, угол 0 — он лежит горизонтально. Числовой пример: $\alpha_1 = 40°$, $\alpha_2 = 20°$ ($\operatorname{tg} = 0{,}839$ и $0{,}364$): $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}601 \approx 31°$ или $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}237 \approx 13°$.

Ответ. $\alpha = \operatorname{arctg}\Big[\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha_1 \pm \operatorname{tg}\alpha_2)\Big]$: «+» — тяжёлые части стержней склеены с одной стороны, «−» — с разных.