Водяная ракета

Задача 8. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 8] «Водяная ракета» представляет собой полуторалитровую ($V = 1{,}5$ л) бутылку, в которую налито небольшое количество воды массой $m = 200$ г. Ракета несёт полезный груз, закреплённый на её корпусе снаружи. Бутылка заткнута резиновой пробкой, а давление воздуха в ней равно $p = 5$ атмосфер. Оцените, на какую высоту взлетит эта ракета, запущенная вертикально вверх из перевёрнутого положения в результате быстрого выброса воды после удаления пробки. В момент старта ракета была неподвижна. Общая масса взлетевшей ракеты с «боеголовкой» $M = 0{,}5$ кг. Считайте, что давление в бутылке при выбросе воды меняется не сильно. Массой пробки и воздуха в бутылке пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

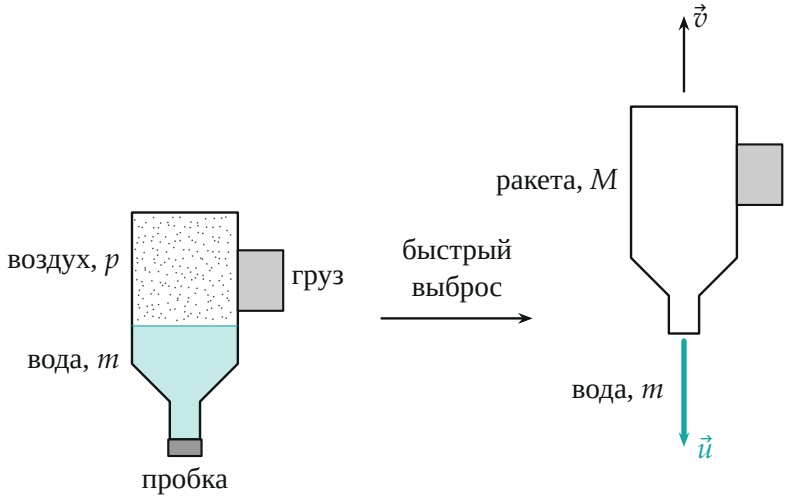


Рис. 1. Ракета до пуска и сразу после выброса воды

▲ **Решение.** **Что происходит.** После удаления пробки сжатый воздух выталкивает воду вниз за очень малое время. Вода и ракета разлетаются в противоположные стороны, как при выстреле: ракета получает скорость вверх, затем летит как тело, брошенное вертикально вверх. Глав-

ная идея: энергию, которую передал воздух, делим между водой и ракетой по закону сохранения импульса, а потом считаем высоту по закону сохранения энергии для ракеты. Класс задачи: реактивное движение при быстром выбросе, импульс и энергия в «выстреле».

Обозначения. $m = 0{,}2$ кг — масса воды, $M = 0{,}5$ кг — масса ракеты с грузом после выброса (воды в ней уже нет), $\Delta V = m/\rho$ — объём вытолкнутой воды, $p_0 = 1$ атм — давление атмосферы, v — скорость ракеты, u — скорость воды (модули, сразу после выброса, в системе отсчёта Земли), A — работа газа, перешедшая в кинетическую энергию воды и ракеты.

1. Работа воздуха. Вода объёмом $\Delta V = m/\rho = 2 \cdot 10^{-4}$ м^3 (200 см^3) вылетает из бутылки; на это место расширяется воздух и совершает работу. Давление воздуха меняется мало (так сказано в условии), поэтому работа равна произведению давления на изменение объёма. Снаружи воду и ракету *тормозит* атмосфера: на выходе воду встречает воздух давлением p_0, и часть работы идёт на то, чтобы его потеснить. Поэтому полезная работа — с разностью давлений:

$$A = (p - p_0)\,\Delta V = (5 - 1) \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 80 \text{ Дж}.$$

Это энергия, переходящая в кинетическую энергию воды и ракеты; потенциальную энергию при быстром выбросе не учитываем.

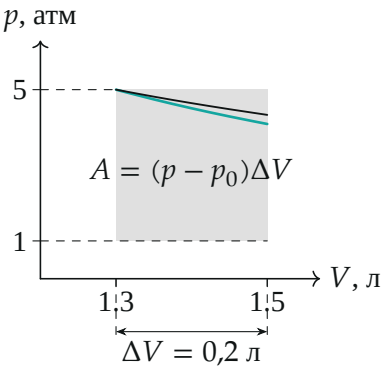


Рис. 2. Работа газа — площадь серого прямоугольника; кривые — изотерма (чёрная) и адиабата (бирюза)

2. Закон сохранения импульса. Система «ракета + вода»: выброс очень быстрый, внутренние силы давления во много раз больше силы тяжести, поэтому импульс системы за время выброса сохраняется. До выброса всё неподвижно, поэтому векторная сумма импульсов после выброса равна нулю; в проекции на вертикаль, направленную вверх:

$$Mv - mu = 0 \quad \Rightarrow \quad Mv = mu.$$

Импульсы ракеты и воды равны по модулю; обозначим его $P = Mv = mu$.

3. Деление энергии. Кинетические энергии при равных импульсах P обратно пропорциональны массам: $K = P^2/(2\,\text{масса})$,

$$K_M = \frac{P^2}{2M}, \qquad K_m = \frac{P^2}{2m}, \qquad \frac{K_M}{K_m} = \frac{m}{M}.$$

Работа газа идёт в сумму $K_M + K_m = A$, поэтому на ракету приходится доля $m/(M+m)$:

$$K_M = A\,\frac{m}{M+m} = 80 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}7} \approx 22{,}9\ \text{Дж}, \qquad K_m = A\,\frac{M}{M+m} \approx 57{,}1\ \text{Дж}.$$

Лёгкая вода получает большую часть энергии. Скорость ракеты: $v = \sqrt{2K_M/M} \approx 9{,}6$ м/с, воды $u = Mv/m \approx 24$ м/с.

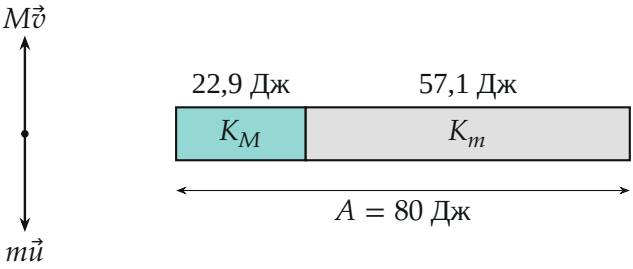


Рис. 3. Импульсы равны по модулю; энергия A делится обратно массам: $K_M = \frac{2}{7}A$

4. Подъём ракеты. После выброса ракета (без воды) летит вверх; сопротивлением воздуха пренебрегаем, сила тяжести — единственная си-

ла, закон сохранения механической энергии: кинетическая K_M полностью переходит в потенциальную энергию на высоте подъёма h (выброс был у самой земли — высота за время выброса пренебрежимо мала):

$$K_M = Mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{K_M}{Mg} = \frac{A\,m}{(M+m)Mg} = \frac{4pm^2}{5\rho Mg\,(M+m)}.$$

Последняя запись — через $A = (p-p_0)m/\rho = \frac{4}{5}\,p\,m/\rho$ (при $p_0 = \frac{1}{5}p$). Число:

$$h = \frac{22{,}9}{0{,}5\cdot 10} \approx 4{,}6 \text{ м}.$$

Обратите внимание. Работа воздуха — $(p-p_0)\Delta V$, а не $p\,\Delta V$: пять атмосфер — давление внутри, а снаружи уже стоит одна, и она принимает часть работы. Если взять полное $p\,\Delta V = 100$ Дж, получится $h \approx 5{,}7$ м — завышение на четверть.

Проверка. Размерность h: Дж/(кг·м/с^2) = м. Скорость вытекания воды относительно ракеты, $u+v \approx 33$ м/с, того же порядка, что по Бернулли $\sqrt{2(p-p_0)/\rho} = 28$ м/с: разница объясняется тем, что при очень быстром выбросе в оценке нет разгона ракеты по ходу выброса. Это оценка, и 4,6 м получена в рамках допущений: давление постоянно (на самом деле оно падает на 13–18%), потерь нет, сопротивления нет.

Ответ. $h = \dfrac{K_M}{Mg} = \dfrac{(p-p_0)\,m\cdot m}{\rho\,Mg\,(M+m)} = \dfrac{4pm^2}{5\rho Mg(M+m)} \approx 4{,}6$ м.