Четырёхугольная проволочная пирамида

Задача 9. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 9] Из проволоки сделали правильную четырёхугольную пирамиду, все рёбра которой имеют одинаковое сопротивление R. К серединам двух соседних (перпендикулярных) рёбер основания подсоединили выводы A и B омметра — прибора для измерения сопротивлений. Что покажет омметр?

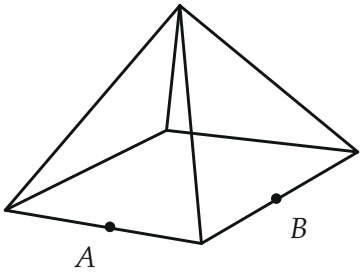


Рис. 1. Проволочная пирамида, выводы омметра A и B

▲ **Решение. Что происходит.** Омметр пропускает ток от A к B и показывает отношение напряжения к току. Ток растекается по восьми рёбрам пирамиды, а схема не сводится к последовательным и параллельным участкам напрямую. Главная идея — симметрия: у схемы есть плоскость симметрии, и точки на ней имеют одинаковый потенциал, поэтому их можно соединить проводником, а соединённая схема уже считается обычным свёртыванием. Класс задачи: сопротивление цепи со скрытой симметрией.

Обозначения. V_1, V_2, V_3, V_4 — вершины основания по обходу, S — вершина пирамиды. A — середина ребра V_1V_2, B — середина ребра V_2V_3 (рёбра соседние, общая вершина V_2). Каждое ребро — резистор R; A делит ребро V_1V_2 на два участка по $R/2$, и B делит V_2V_3 так же.

1. Схема. Вид сверху (рис. 2): S лежит над центром основания и соединена с каждой вершиной основания резистором R; вершины соединены по кольцу резисторами R, причём ребро V_1V_2 разбито точкой A на два по $R/2$, ребро V_2V_3 — точкой B.

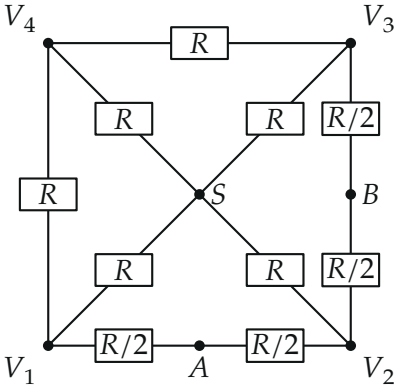


Рис. 2. Вид сверху: S над центром основания; половинки рёбер у A и B — по $R/2$

2. Симметрия и потенциалы. Плоскость SV_2V_4 (рис. 3) — плоскость симметрии: при отражении в ней вершины V_1 и V_3 меняются местами, A и B меняются местами, а S, V_2, V_4 остаются на месте. Подадим на выводы потенциалы $+U/2$ у A и $-U/2$ у B. Отражённая схема — та же схема с A и B наоборот, то есть потенциалы вида $\varphi'(x) = -\varphi(\text{отражение } x)$ дают то же самое решение (оно единственно). Для точки, лежащей на самой плоскости, отражение — она сама: $\varphi = -\varphi$, поэтому

$$\varphi_S = \varphi_{V_2} = \varphi_{V_4} = 0.$$

Точки с равными потенциалами можно соединить проводником — токи в схеме не изменятся: между ними всё равно ток не идёт. Соединим S, V_2, V_4 в один узел N.

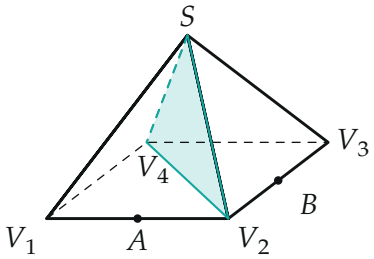


Рис. 3. Плоскость симметрии SV_2V_4: $V_1 \leftrightarrow V_3$, $A \leftrightarrow B$

3. Свёртка. После соединения (рис. 4, а) схема разделилась на две одинаковые половины: левая — между A и N, правая — между B и N. Рассмотрим левую половину:

- участок AV_2 ($R/2$) идёт прямо от A к N, ведь $V_2 \in N$;
- другой путь: AV_1 ($R/2$), а от V_1 в N ведут два параллельных ребра V_1V_4 и V_1S, оба по R, их общее сопротивление $R\|R = R/2$; вся ветвь — $R/2 + R/2 = R$.

Эти два пути параллельны:

$$R_{AN} = \frac{\frac{R}{2}\cdot R}{\frac{R}{2}+R} = \frac{R}{3}.$$

Правая половина — зеркальная копия: $R_{BN} = R/3$.

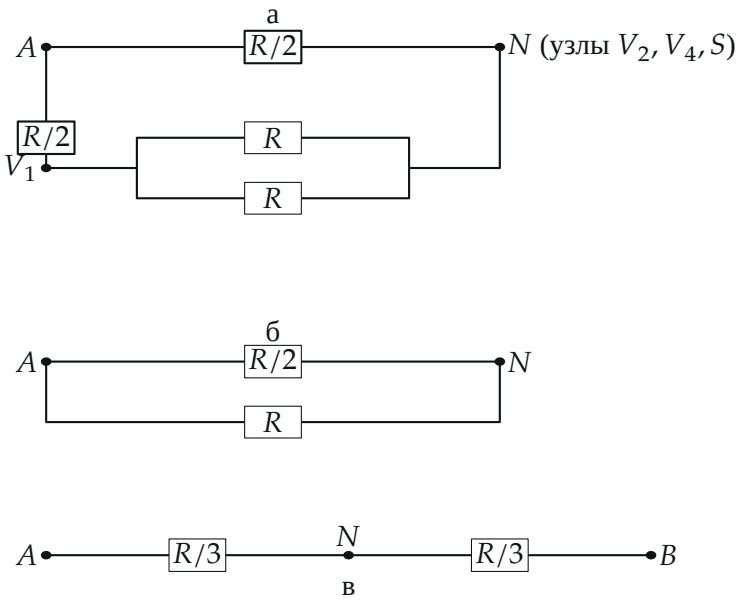


Рис. 4. Свёртка: (а) узлы V_2, V_4, S соединены в N; (б) ветвь через V_1 равна R; (в) две половины по $R/3$

4. Омметр. Половины соединены последовательно через N:

$$R_{AB} = R_{AN} + R_{BN} = \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{2R}{3}.$$

Обратите внимание. Соединять можно только точки, потенциалы которых равны по симметрии. Вершины V_1 и V_3 соединять нельзя: потенциалы у них противоположные ($+\frac{1}{6}IR$ и $-\frac{1}{6}IR$, см. проверку), между ними пошёл бы ток.

Проверка. Второй способ — расчёт потенциалов (метод узловых потенциалов): при токе I через омметр потенциалы $A, V_1, V_2, V_4, S, V_3, B$ равны $+\frac{1}{3}IR$, $+\frac{1}{6}IR$, 0, 0, 0, $-\frac{1}{6}IR$, $-\frac{1}{3}IR$ (решение системы уравнений Кирхгофа для семи узлов, посчитано на компьютере); разность $\varphi_A - \varphi_B = \frac{2}{3}IR$, то есть $R_{AB} = 2R/3$, и потенциалы S, V_2, V_4 действительно нулевые. Оценка: между A и B есть путь $A \to V_2 \to B$ сопротивлением $R/2 + R/2 = R$, а остальные пути лишь добавляют проводимость, поэтому $R_{AB} < R$: $2R/3 < R$ верно.

Ответ. Омметр покажет $R_{AB} = \dfrac{2R}{3}$.