Бусинка и движущийся заряд

Задача 10. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 10] По длинному непроводящему стержню может без трения перемещаться бусинка массой m и зарядом q. Вдоль стержня на расстоянии d от него перемещают с постоянной скоростью V_0 точечный заряд q. Считая, что в начальный момент бусинка покоилась и была бесконечно удалена от точечного заряда, определите максимальную скорость $V_{\max}$ бусинки. Постройте график зависимости $V_{\max}$ от V_0.

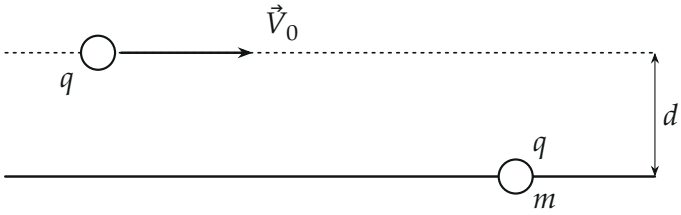


Рис. 1. Бусинка на стержне и движущийся заряд

▲ **Решение. Что происходит.** Заряды одноимённые, значит, отталкиваются. Подходящий сзади заряд толкает бусинку вперёд вдоль стержня, а когда окажется напротив неё и пройдёт дальше — начнёт тормозить. Если заряд едет медленно, то пройти мимо бусинки он не может: сила отталкивания растёт так сильно, что бусинка отлетает вперёд, как мяч от движущейся стенки со скоростью $2V_0$. Если заряд едет быстро, он проносится мимо и бусинка лишь на время приходит в движение. Главная идея — перейти в систему отсчёта заряда: в ней заряд неподвижен, поле статично, и сохраняется энергия бусинки; затем вернуться в лабораторную систему по закону сложения скоростей. Класс задачи: движение в поле неподвижного заряда, смена системы отсчёта.

Обозначения. $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Ось x — вдоль стержня по движению заряда; x' — расстояние от бусинки до основания перпендикуляра, опущенного из заряда на стержень, со знаком (при $x' > 0$ бусинка впереди заряда). Штрих — скорости в системе отсчёта заряда: v', без штриха —

в лабораторной системе (стержня): v. Через V_1 обозначим величину

$$V_1 = \sqrt{\frac{2kq^2}{md}},$$

она появится в решении как критическая скорость.

1. Переход в систему отсчёта заряда. Движение заряда равномерное и прямолинейное, поэтому система отсчёта, связанная с ним, инерциальная. В ней заряд неподвижен и создаёт обычное кулоновское поле (скорость мала по сравнению со скоростью света), стержень движется влево со скоростью V_0, а бусинка вначале — со скоростью $v'_0 = -V_0$ (рис. 2). Закон сложения скоростей: $v = v' + V_0$.

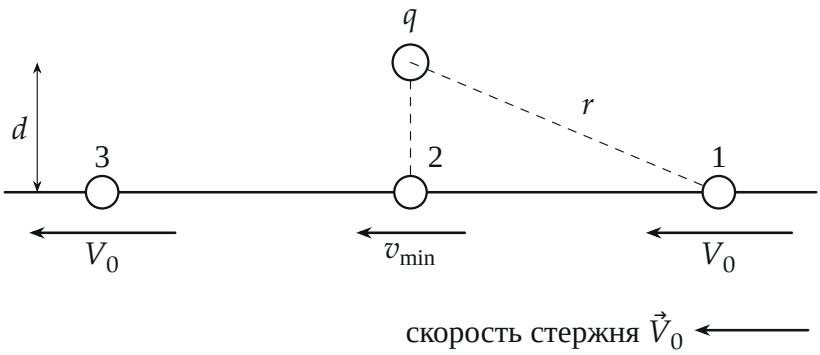


Рис. 2. В системе отсчёта заряда он неподвижен, стержень и бусинка летят влево: 1 — бусинка далеко, 2 — ближе всего к заряду (скорость наименьшая), 3 — улетела

2. Закон сохранения энергии. В этой системе сила реакции стержня $\vec{N}$ перпендикулярна стержню и поэтому перпендикулярна скорости бусинки (бусинка движется вдоль стержня): работа $\vec{N}$ равна нулю, трения нет, значит, сохраняется сумма кинетической энергии бусинки и энергии её взаимодействия с неподвижным зарядом. Расстояние между ними $r = \sqrt{x'^2 + d^2}$:

$$\frac{mv'^2}{2} + \frac{kq^2}{\sqrt{x'^2 + d^2}} = \frac{mV_0^2}{2}.$$

Справа — начальное состояние: бусинка далеко ($U = 0$) и движется со скоростью V_0. Выразим v' через V_1 (так как $\frac{2kq^2}{m} = V_1^2 d$):

$$v'^2 = V_0^2 - \frac{V_1^2 d}{\sqrt{x'^2 + d^2}}.$$

3. Качественная картина: горб потенциальной энергии. Энергия отталкивания $U = kq^2/\sqrt{x'^2 + d^2}$ наибольшая при $x' = 0$, где $U_{\max} = kq^2/d = mV_1^2/2$ (рис. 3). Бусинка может пройти этот горб, если её начальная кинетическая энергия не меньше высоты горба:

$$\frac{mV_0^2}{2} > \frac{mV_1^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad V_0 > V_1.$$

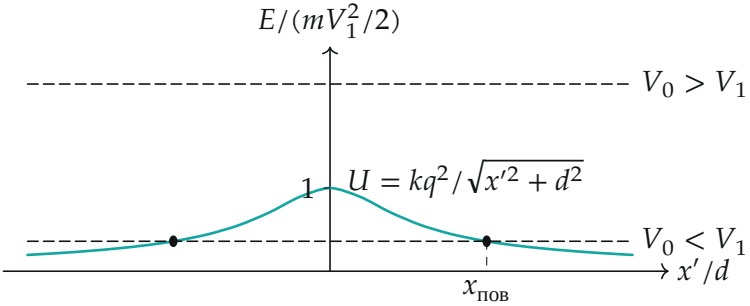


Рис. 3. Потенциальная энергия бусинки в поле неподвижного заряда (в единицах $mV_1^2/2 = kq^2/d$) и две энергии: $E = mV_0^2/2$ выше горба — бусинка проходит мимо заряда, ниже — отражается в точке поворота $x_{\text{пов}}$

4. Случай $V_0 > V_1$: бусинка проходит мимо заряда. Движение идёт в одну сторону ($v' < 0$), скорость $|v'| = \sqrt{V_0^2 - V_1^2 d/\sqrt{x'^2 + d^2}}$ наименьшая в самой высокой точке горба, при $x' = 0$:

$$|v'|_{\min} = \sqrt{V_0^2 - V_1^2}.$$

В лабораторной системе $v = v' + V_0 = V_0 - |v'|$, так что скорость бусинки наибольшая как раз там, где $|v'|$ наименьшая — когда заряд проходит

мимо неё (рис. 4, бирюзовая кривая):

$$V_{\max} = V_0 - \sqrt{V_0^2 - V_1^2}.$$

Когда заряд уходит вперёд, $|v'|$ снова растёт до V_0 и бусинка останавливается ($v \to 0$).

5. Случай $V_0 < V_1$: бусинка отражается. Энергии не хватает на горб: в точке поворота $v' = 0$ (лаб. скорость V_0), потом бусинка в системе заряда летит обратно со скоростью, возрастающей до $+V_0$ на бесконечности (энергия сохраняется, $U \to 0$). В лабораторной системе $v = v' + V_0 \to 2V_0$ (рис. 4, чёрные ветви): скорость растёт всё время, максимум — в пределе, когда заряд далеко позади:

$$V_{\max} = 2V_0.$$

Тот же результат даёт столкновение с движущейся стенкой: упругий отскок мяча от стенки, едущей со скоростью V_0.

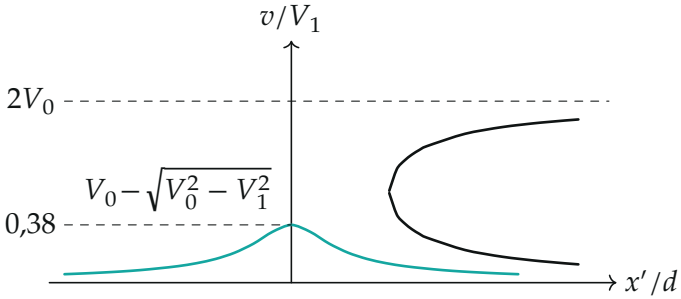


Рис. 4. Скорость бусинки в лабораторной системе: бирюзовая — $V_0 = 1{,}5V_1$, чёрная — $V_0 = 0{,}6V_1$ (нижняя ветвь — заряд догоняет, верхняя — после отражения)

6. График $V_{\max}(V_0)$. Объединяем: при $V_0 < V_1$ — прямая $2V_0$ (в единицах V_1: $2V_0/V_1$ растёт от 0 до 2); при $V_0 > V_1$ — ветвь $V_0 - \sqrt{V_0^2 - V_1^2}$, начинающаяся при $V_0 = V_1$ значением V_1 с вертикальной касательной (производная $1 - V_0/\sqrt{V_0^2 - V_1^2} \to -\infty$) и убывающая к нулю: при $V_0 \gg V_1$ получаем $V_0 - V_0(1 - \frac{V_1^2}{2V_0^2}) = \frac{V_1^2}{2V_0}$ (рис. 5). В точке

$V_0 = V_1$ — разрыв: слева значение стремится к $2V_1$, в самой точке $V_{\max} = V_1$ (бусинка подходит к вершине горба с нулевой скоростью, асимптотически).

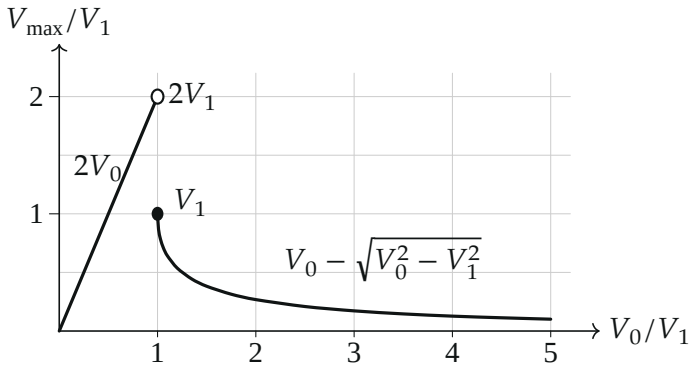


Рис. 5. Зависимость $V_{\max}(V_0)$: прямая $2V_0$ до $V_0 = V_1$ (точка $(V_1, 2V_1)$ выколота), затем ветвь, начинающаяся в (V_1, V_1) с вертикальной касательной и убывающая к нулю как $V_1^2/(2V_0)$

Обратите внимание. В лабораторной системе энергия бусинки *не* сохраняется: заряд движется под действием внешней силы и отдаёт энергию. Поэтому закон сохранения энергии применяется именно в системе заряда, где поле статично, а скорость стержня перпендикулярна силе реакции.

Проверка. Размерность: $kq^2/(md)$ — Дж/кг = м^2/с^2, V_1 — скорость. Численная проверка: прямое интегрирование уравнения движения бусинки в лабораторной системе (python, $V_1 = 1$) для $V_0 = 0{,}5;\ 0{,}9;\ 1{,}5;\ 2;\ 3$ даёт $V_{\max} = 1{,}00;\ 1{,}80;\ 0{,}38;\ 0{,}27;\ 0{,}17$ — совпадение с формулами до трёх знаков.

Ответ.

$$V_{\max} = \begin{cases} 2V_0, & V_0 < V_1, \\ V_0 - \sqrt{V_0^2 - V_1^2}, & V_0 > V_1, \end{cases} \qquad V_1 = \sqrt{\frac{2kq^2}{md}},\ k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

График — рис. 5.