Гирьки и дятел

Задача 1. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 1] На лёгкой короткой нити к ветке сосны подвешена гирька массой $m = 1$ кг. К ней привязана другая лёгкая нить с длиной в недеформированном состоянии $L = 1$ м и жёсткостью $k = 1$ кН/м, на конце которой висит ещё одна гирька массой $m = 1$ кг. Система находилась в равновесии до момента, когда верхнюю нить перебил дятел. Гирьки упали на землю одновременно. Каково расстояние H от ветки до земли? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

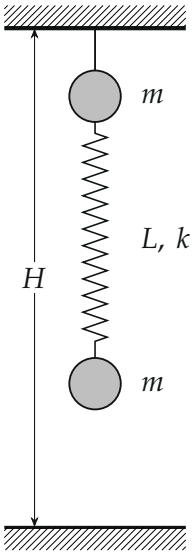


Рис. 1. Поясняющий рисунок: до удара дятла верхняя нить (короткая) натянута, нижняя растянута весом нижней гирьки.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока висели в покое, нижняя нить была растянута весом нижней гирьки. Нить перебита: на две гирьки действуют только сила тяжести и сила упругости нижней нити, а она внутренняя для пары. Поэтому центр масс пары падает с ускорением g, а гирьки относительно него совершают колебания на упругой нити. Нить работает на растяжение: когда она вернулась к длине L, она провисает, и дальше гирьки летят свободно, верхняя быстрее нижней. «Упали одновременно» означает, что верхняя догнала нижнюю как раз у земли. Идея:

найти время до встречи через относительное движение, потом высоту через падение центра масс.

Обозначения. Ось z вниз, начало на ветке. Длину короткой нити не учитываем: верхняя гирька вначале на уровне ветки. x — растяжение нижней нити (её длина $L + x$), x_0 — начальное растяжение, T — время падения.

1. Начальное растяжение. Нижняя гирька покоилась: сила упругости нити уравновешивала силу тяжести,

$$kx_0 = mg, \qquad x_0 = \frac{mg}{k} = 1 \text{ см}.$$

2. Момент после удара дятла. Нить растянута по-прежнему (длина не успела измениться), поэтому на верхнюю гирьку вниз действуют mg и $kx_0 = mg$, на нижнюю — mg вниз и kx_0 вверх (рис. 2). Ускорения: $a_1 = 2g$ вниз, $a_2 = 0$. Нижняя гирька сначала не падает, верхняя падает с удвоенным ускорением — нить сжимается.

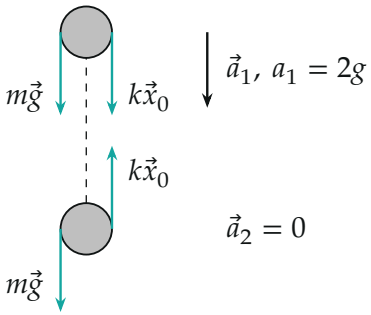


Рис. 2. Силы на гирьки сразу после удара: нить $k\vec{x}_0$ тянет верхнюю вниз, нижнюю — вверх.

3. Относительное движение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось z для каждой гирьки, пока нить натянута:

$$ma_1 = mg + kx, \qquad ma_2 = mg - kx.$$

Вычтем: $x = z_2 - z_1 - L$, поэтому $\ddot{x} = a_2 - a_1 = -\dfrac{2k}{m}x$. Сила тяжести

выпала: это гармонические колебания с

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \approx 44{,}7\ \text{с}^{-1}, \qquad x = x_0 \cos \omega t$$

(при $t = 0$ гирьки покоились относительно друг друга, $\dot{x} = 0$). Нить перестаёт натягиваться, когда $x = 0$, то есть через четверть периода:

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega} \approx 0{,}035\ \text{с}.$$

В этот момент скорость сближения гирек максимальна:

$$u = |\dot{x}| = x_0\omega = g\sqrt{\frac{2m}{k}} \approx 0{,}45\ \text{м/с}.$$

Обратите внимание: колебания продолжились бы дальше только с «толкающей» нитью. Нить толкать не может, она провисает, и дальше $x < 0$ не бывает.

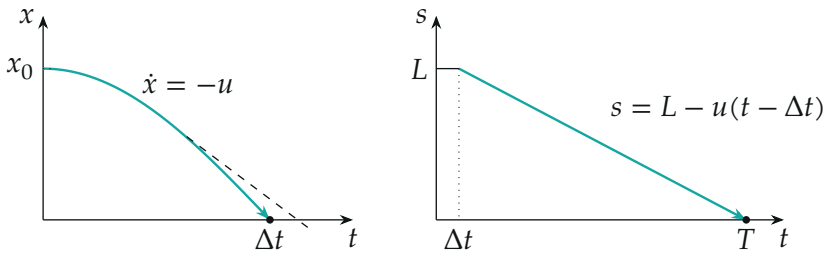


Рис. 3. Слева — растяжение нити $x(t)$ за время Δt (масштаб по t увеличен). Справа — расстояние s между гирьками: при $t = \Delta t$ оно равно L, потом убывает линейно до нуля в момент T (не в масштабе: $\Delta t \ll T$).

4. Свободный полёт и встреча. При $t > \Delta t$ нить провисает, обе гирьки падают с ускорением g, расстояние $s = L - u(t - \Delta t)$ между ними уменьшается линейно (рис. 3). Гирьки упали одновременно, значит в момент T они на земле, оба на одном уровне, $s = 0$:

$$T = \Delta t + \frac{L}{u} \approx 0{,}035 + 2{,}236 = 2{,}271\ \text{с}.$$

Обратите внимание: «упали одновременно» — условие встречи гирек у земли. Разные высоты начальных точек (расстояние между гирьками $L + x_0$) компенсируются тем, что верхняя нагоняет нижнюю.

5. Высота. Второй закон Ньютона для пары в проекции на ось z: $2m\,a_{\text{цм}} = 2mg$ (силы упругости внутренние и сокращаются), центр масс падает с g без начальной скорости. В начале он на $(L + x_0)/2$ ниже ветки, в конце — на земле, поэтому

$$H = \frac{gT^2}{2} + \frac{L + x_0}{2} \approx 25{,}79 + 0{,}505 \approx 26{,}3 \text{ м}.$$

Главная часть: $T \approx L/u$, и тогда

$$\frac{gT^2}{2} \approx \frac{gL^2}{2u^2} = \frac{kL^2}{4mg} = 25 \text{ м}, \qquad H \approx \frac{kL^2}{4mg} + \frac{L}{2} = 25{,}5 \text{ м}.$$

Поправка Δt увеличивает высоту примерно на 0,8 м (это 3 %): организаторы приводят ответ 25,5 м в главном приближении, а критерии засчитывают и точную формулу.

Проверка. Размерность: $kL^2/(mg) = \text{Н/м} \cdot \text{м}^2/\text{Н} = \text{м}$. Предел $k \to \infty$: $u \to 0$, гирьки падают, не сближаясь, $T \to \infty$ — встреча невозможна, как и должно быть для жёсткой связи. Второй способ: прямой численный расчёт движения двух гирек с нитью, не передающей сжатие, даёт встречу на глубине 26,30 м через 2,271 с.

Ответ. $H = \dfrac{g}{2}\Big(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}} + \dfrac{L}{g}\sqrt{\dfrac{k}{2m}}\Big)^2 + \dfrac{L + x_0}{2} \approx 26{,}3$ м; в главном приближении $H \approx \dfrac{kL^2}{4mg} + \dfrac{L}{2} = 25{,}5$ м.