Цикл с изотермой

Задача 2. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 2] Рабочим телом теплового двигателя является $\nu = 1$ моль гелия. Цикл работы тепловой машины состоит из линейного в pV-координатах участка 1–2 и изотермы 2–1. Максимальный объём гелия в цикле в 7 раз больше минимального. Минимальная температура гелия в цикле составляет $T_0 = 280$ К. Какое количество теплоты было получено гелием в данном цикле от нагревателя? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

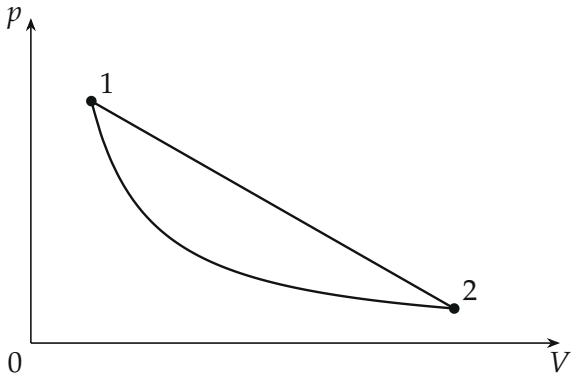


Рис. 1. Цикл: прямая 1–2 и изотерма 2–1 (изотерма — ниже прямой).

▲ **Решение. Что происходит.** Тепло газ получает не на всём участке 1–2. Газ расширяется от точки 1 к точке 2, сначала нагреваясь, потом остывая. Теплота ΔQ на малом шаге равна приращению внутренней энергии плюс работе. Нужно найти точку 3 на прямой, где ΔQ меняет знак с плюса на минус, и сложить теплоту только на участке 1–3. На изотерме 2–1 газ сжимается при постоянной температуре и отдаёт теплоту.

Обозначения. V_1, p_1 — объём и давление в точке 1, $u = V/V_1$ — объём в единицах V_1 (от 1 до 7 по условию). Все величины выражаем через p_1V_1.

1. Состояния 1 и 2. Изотерма — кривая $pV = \text{const}$, поэтому

$$p_1V_1 = p_2V_2 = \nu RT_0, \qquad V_2 = 7V_1, \quad p_2 = \frac{p_1}{7}.$$

Почему температура изотермы минимальна, а не какая-то другая: на прямой $pV = p_1V_1\,\dfrac{u(8-u)}{7}$ (формулу даёт пункт 2) и $u(8-u) - 7 = (u-1)(7-u) \geq 0$, то есть на прямой температура выше T_0 (хорда лежит над гиперболой). Значит T_0 относится именно к изотерме.

2. Прямая 1–2. Линейная зависимость $p(V)$ проходит через (V_1, p_1) и $(7V_1,\, p_1/7)$:

$$p = p_1\,\frac{8-u}{7}.$$

3. Теплота на малом шаге. Первый закон термодинамики для гелия (одноатомный газ, $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$) на малом участке du:

$$\Delta Q = \Delta U + p\,\Delta V = \frac{3}{2}\,\Delta(pV) + p\,\Delta V.$$

Подставим $pV = \dfrac{p_1V_1}{7}\,u(8-u)$, $\Delta(pV) = \dfrac{p_1V_1}{7}(8-2u)\,du$ и $p\,\Delta V = \dfrac{p_1V_1}{7}(8-u)\,du$:

$$\Delta Q = \frac{p_1V_1}{7}\Big[\tfrac{3}{2}(8-2u) + (8-u)\Big]du = \frac{p_1V_1}{7}\,(20-4u)\,du.$$

4. Точка, где ΔQ меняет знак. $\Delta Q = 0$ при $u_3 = 5$: $V_3 = 5V_1$, $p_3 = \dfrac{3}{7}p_1$. До точки 3 газ получает теплоту ($\Delta Q > 0$ при $du > 0$), после — отдаёт (рис. 3). Обратите внимание: температура на прямой достигает максимума раньше, при $u = 4$ (там pV максимально), а подводить теплоту нужно ещё до $u = 5$: между $u = 4$ и $u = 5$ газ остывает, но работа расширения больше убыли внутренней энергии, поэтому теплота всё ещё подводится.

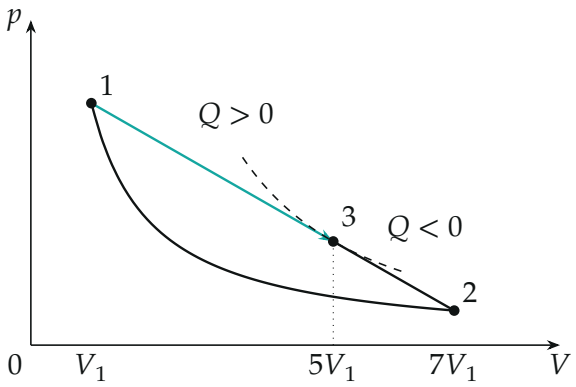


Рис. 2. Теплота подводится на участке 1–3 (бирюза), на 3–2 газ отдаёт её. Пунктир — адиабата, касающаяся прямой в точке 3.

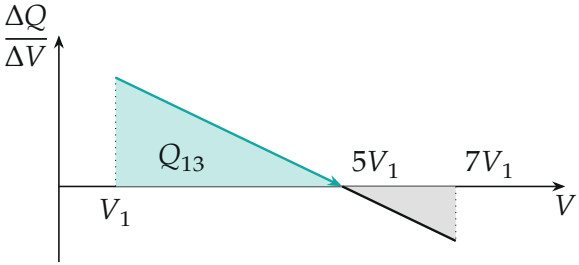


Рис. 3. Теплота на единицу объёма вдоль прямой убывает линейно и меняет знак при $V = 5V_1$. Бирюзовая площадь — Q_{13}.

5. Теплота на участке 1–3. Сложим ΔQ от $u = 1$ до $u = 5$: это площадь бирюзовой фигуры на рис. 3 (треугольник с основанием 4 и высотой 16 в единицах $p_1V_1/7$):

$$Q_+ = Q_{13} = \frac{p_1V_1}{7}\int_1^5 (20 - 4u)\,du = \frac{p_1V_1}{7}[20u - 2u^2]_1^5 = \\ = \frac{32}{7}p_1V_1 = \frac{32}{7}\nu RT_0.$$

Проверим тем же законом иначе, по формулам для участка 1–3. Температура в точке 3: $T_3 = \dfrac{p_3V_3}{\nu R} = \dfrac{15}{7}T_0$. Изменение внутренней энергии и

работа (площадь трапеции под прямой):

$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2}\,\nu R\,(T_3 - T_0) = \frac{12}{7}\,\nu R T_0,$$
$$A_{13} = \frac{p_1 + p_3}{2}\,(V_3 - V_1) = \frac{20}{7}\,p_1 V_1.$$

Сумма $\frac{12}{7} + \frac{20}{7} = \frac{32}{7}$ (в единицах $\nu R T_0$) — та же величина. Нагреватель на изотерме не работает: там газ сжимается при постоянной температуре и отдаёт теплоту.

Проверка. Размерность: $\nu R T_0$ — джоуль. Второй способ для точки 3: она — точка касания прямой и адиабаты $pV^{5/3} = \text{const}$ (рис. 2). Наклон прямой $dp/dV = -p_1/(7V_1)$, наклон адиабаты $-\frac{5}{3}\,p/V$; равенство даёт

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{8-u}{u} = 1, \qquad u = 5,$$

как и раньше. Ещё одна проверка: на всей прямой 1–2 газ вернулся к температуре T_0, значит $Q_{12} = A_{12} = \frac{24}{7}\,p_1 V_1$ (площадь трапеции), и интеграл $\frac{p_1 V_1}{7}\int_1^7 (20 - 4u)\,du$ даёт то же $\frac{24}{7}\,p_1 V_1$.

Ответ. $Q_+ = \frac{32}{7}\,\nu R T_0 \approx 10{,}6$ кДж.