Пять вольтметров

Задача 3. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 3] Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из двух батареек с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 5$ В и $\mathcal{E}_2 = 2$ В и пяти одинаковых вольтметров. Найдите показания каждого из вольтметров. Сопротивления батареек много меньше сопротивлений вольтметров.

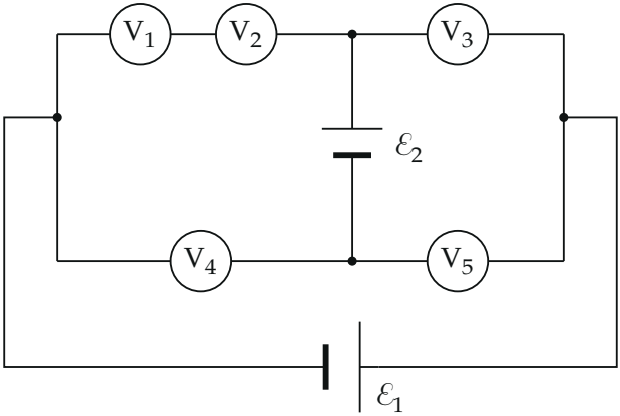


Рис. 1. Схема цепи.

▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — это резистор с большим сопротивлением R; у всех пяти оно одинаково, поэтому ток через вольтметр пропорционален его показанию: $I = U/R$. Батарейки идеальные (сопротивления малы), значит напряжение на каждой равно её ЭДС. Задача сводится к правилам Кирхгофа для сложной цепи с четырьмя узлами; неизвестные удобно записывать сразу в вольтах, множитель $1/R$ сократится.

Обозначения. Узлы: A — левый, где сходятся V_1, V_4 и батарейка $\mathcal{E}_1$; B — правый, где сходятся V_3, V_5 и $\mathcal{E}_1$; M — верхний, между V_2, V_3 и $\mathcal{E}_2$; N — нижний, между V_4, V_5 и $\mathcal{E}_2$. Полярность: у $\mathcal{E}_1$ длинная пластина (плюс) справа, значит $\varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E}_1$; у $\mathcal{E}_2$ плюс сверху, значит $\varphi_M - \varphi_N = \mathcal{E}_2$. Токи намечены на рис. 2: от плюса $\mathcal{E}_1$ (узел B) через вольтметры к узлу A; через V_1 и V_2 течёт один и тот же ток (они включены последовательно, между ними нет ответвления); $U_1, \ldots, U_5$

— напряжения на вольтметрах в этих направлениях, $j = J/R$ — ток через $\mathcal{E}_2$ снизу вверх, умноженный на R. Знаки проверим в конце: показание вольтметра — модуль.

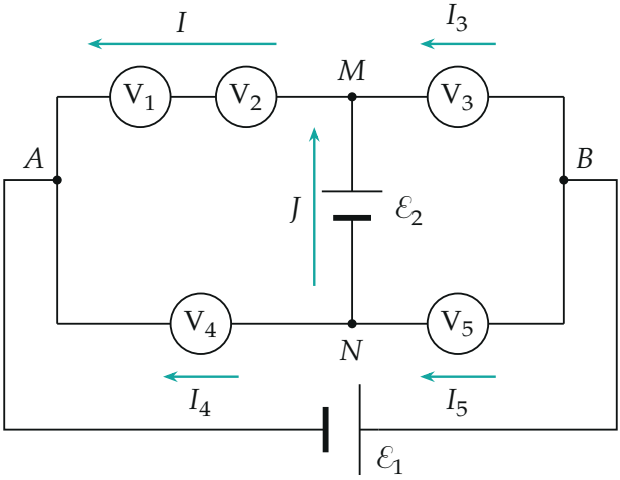


Рис. 2. Узлы и направления токов (I — ток через V_1 и V_2, J — ток через $\mathcal{E}_2$ снизу вверх).

1. Первый закон Кирхгофа для узлов M и N (сумма втекающих токов равна сумме вытекающих; ток измеряем в вольтах, $u = IR$). В узел M втекают токи через V_3 и $\mathcal{E}_2$, вытекает — через V_2; в узел N втекает ток через V_5, вытекают — через V_4 и $\mathcal{E}_2$:

$$M:\ u = U_3 + j, \qquad N:\ U_4 + j = U_5.$$

Здесь $U_1 = U_2 = u$: показания первого и второго вольтметров одинаковы, потому что через них течёт один и тот же ток.

2. Второй закон Кирхгофа (напряжение между двумя узлами равно сумме напряжений вдоль любого пути между ними). Зачем три пути: по ним выразим всё через u. Путь $B \to \mathrm{V}_3 \to M \to \mathrm{V}_2 \to \mathrm{V}_1 \to A$ и путь $B \to \mathrm{V}_5 \to N \to \mathrm{V}_4 \to A$ дают $\varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E}_1$; путь $M \to \mathrm{V}_2 \to \mathrm{V}_1 \to A$ сравним с путём $M \to \mathcal{E}_2 \to N \to \mathrm{V}_4 \to A$ (на батарейке от плюса к минусу потенциал падает на $\mathcal{E}_2$):

$$2u + U_3 = \mathcal{E}_1, \qquad U_4 + U_5 = \mathcal{E}_1, \qquad 2u - \mathcal{E}_2 = U_4.$$

Отсюда через u:

$$U_3 = \mathcal{E}_1 - 2u, \qquad U_4 = 2u - \mathcal{E}_2, \qquad U_5 = \mathcal{E}_1 - U_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2u.$$

3. Уравнение для u. Ток через $\mathcal{E}_2$ найдём из узла M: $j = u - U_3 = 3u - \mathcal{E}_1$. Теперь запишем закон для узла N: $U_4 + j = U_5$,

$$(2u - \mathcal{E}_2) + (3u - \mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - 2u \quad \Rightarrow \quad 7u = 2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2),$$

$$U_1 = U_2 = u = \frac{2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{7} = 2\ \text{В}.$$

4. Остальные вольтметры. Подставим u в выражения пункта 2:

$$U_3 = \frac{3\mathcal{E}_1 - 4\mathcal{E}_2}{7} = 1\ \text{В},$$
$$U_4 = \frac{4\mathcal{E}_1 - 3\mathcal{E}_2}{7} = 2\ \text{В},$$
$$U_5 = \frac{3(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{7} = 3\ \text{В}.$$

Ток J через $\mathcal{E}_2$: $j = 3u - \mathcal{E}_1 = 1\ \text{В} > 0$, он течёт снизу вверх, от минуса к плюсу внутри батарейки: $\mathcal{E}_2$ работает как источник. Обратите внимание: все токи положительны, значит направления на рис. 2 выбраны верно. Если бы в формуле U_3 вышло отрицательное число, вольтметр показывал бы модуль, а ток через него шёл бы против нарисованной стрелки.

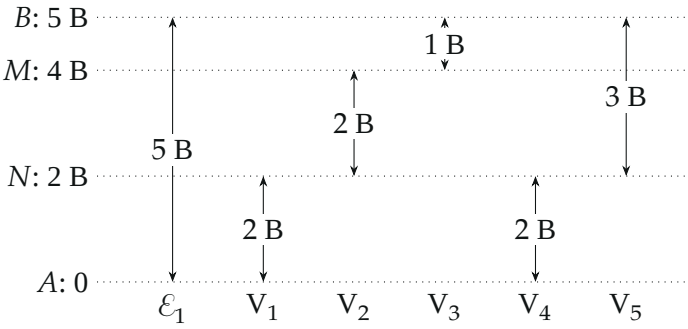


Рис. 3. Потенциалы узлов (потенциал A принят за нуль): каждая стрелка

— напряжение на одном элементе между его концами. Между A и средней точкой V_1–V_2 потенциал растёт на 2 В, затем ещё на 2 В до M.

Проверка. Второй способ — принцип суперпозиции: оставим одну батарейку, вторую замкнём накоротко. Только $\mathcal{E}_1$: от A до объединённых $M{=}N$ параллельно идут цепочка V_1V_2 (сопротивление $2R$) и V_4 (сопротивление R), итого $2R/3$; от $M{=}N$ до B — $V_3 \parallel V_5$, итого $R/2$. Делитель напряжения: на первую часть приходится

$$\frac{2/3}{2/3+1/2}=\frac{4}{7}\text{ от }\mathcal{E}_1,$$

отсюда $U_4=\frac{4}{7}\mathcal{E}_1$, $U_1=U_2=\frac{2}{7}\mathcal{E}_1$, $U_3=U_5=\frac{3}{7}\mathcal{E}_1$. Только $\mathcal{E}_2$ (тогда $A{=}B$): аналогично $U_1=U_2=\frac{2}{7}\mathcal{E}_2$, $U_3=-\frac{4}{7}\mathcal{E}_2$, $U_4=-\frac{3}{7}\mathcal{E}_2$, $U_5=\frac{3}{7}\mathcal{E}_2$. Сумма вкладов совпадает с формулами пункта 4.

Предел $\mathcal{E}_2=0$: $U_3=U_5$ — вольтметры V_3 и V_5 включены параллельно между одними узлами, как и должно быть. Размерность: все U в вольтах. Смысл: на двух последовательных вольтметрах напряжение делится поровну, а батарейка $\mathcal{E}_2$ перераспределяет токи между верхней и нижней ветвями.

Ответ. $U_1=U_2=\dfrac{2(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)}{7}=2$ В; $U_3=\dfrac{3\mathcal{E}_1-4\mathcal{E}_2}{7}=1$ В; $U_4=\dfrac{4\mathcal{E}_1-3\mathcal{E}_2}{7}=2$ В; $U_5=\dfrac{3(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)}{7}=3$ В.