Электрон в скрещенных полях

Задача 4. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 4] В некоторой области пространства созданы однородное электрическое и магнитное поля. Когда электрон влетает в эту область со скоростью v в направлении, показанном стрелкой 1, он движется в этой области прямолинейно и равномерно. Когда электрон с такой же по модулю скоростью влетает в электромагнитное поле вдоль стрелки 2, перпендикулярной направлению 1, он тоже движется в поле прямолинейно и равномерно. Определите направления векторов напряжённости электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$. Найдите отношение модулей E/B.

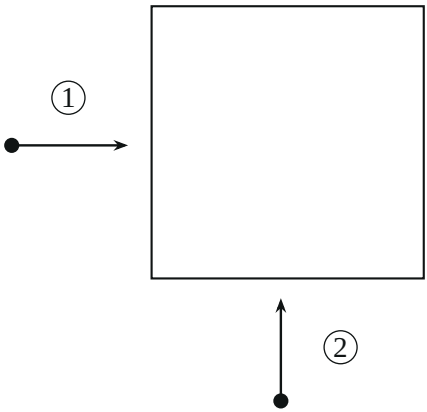


Рис. 1. Область с полями (квадрат) и два направления влёта электрона.

▲ **Решение. Что происходит.** Движение прямолинейное и равномерное — значит, сумма сил на электрон равна нулю. Сила тяжести пренебрежимо мала, остаются электрическая сила $-e\vec{E}$ (электрон имеет заряд $-e$) и магнитная сила Лоренца $-e\,\vec{v}\times\vec{B}$. Они должны уравновешивать друг друга в двух разных направлениях скорости. Идея: записать условие для обоих влётов и вычесть — останется условие только на $\vec{B}$.

Обозначения. Скорость первого электрона $\vec{v}_1$, второго $\vec{v}_2$, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. Оси: x вдоль $\vec{v}_1$, y вдоль $\vec{v}_2$ — обе в плоскости рисунка; z — на нас (рис. 2).

1. Условие равновесия сил. Поля однородны и одни и те же в обоих опытах, поэтому для каждого влёта (силы складываются векторно):

$$-e\vec{E} - e\,\vec{v}_1 \times \vec{B} = 0, \qquad -e\vec{E} - e\,\vec{v}_2 \times \vec{B} = 0.$$

Оба условия дают $\vec{E} = -\vec{v}_1 \times \vec{B} = -\vec{v}_2 \times \vec{B}$. Вычтем одно уравнение из другого (электрическое слагаемое сокращается):

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{B} = 0.$$

2. Направление $\vec{B}$. Векторное произведение равно нулю, если векторы параллельны (поля есть, $\vec{B} \neq 0$). Значит $\vec{B} \parallel \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Вектор $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ лежит в плоскости рисунка (на рис. 2 — штриховая стрелка) и направлен вдоль прямой $y = -x$, под 45° к $\vec{v}_1$ и под 135° к $\vec{v}_2$. Поэтому и $\vec{B}$ лежит в плоскости рисунка вдоль этой прямой.

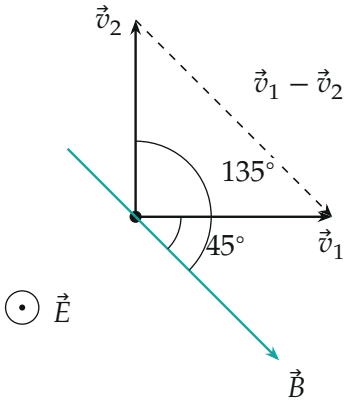


Рис. 2. Скорости электронов в плоскости рисунка; штриховая стрелка $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ задаёт прямую, вдоль которой направлен $\vec{B}$. Вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно плоскости (на нас или от нас).

3. Направление $\vec{E}$ и модуль. Из $\vec{E} = -\vec{v}_1 \times \vec{B}$ следует, что $\vec{E}$ перпендикулярен и $\vec{v}_1$, и $\vec{B}$. Оба лежат в плоскости рисунка, поэтому $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости рисунка: «на нас» или «от нас». Угол между $\vec{v}_1$ и

$\vec{B}$ равен 45° (между $\vec{v}_2$ и $\vec{B}$ — 135°, синус тот же), и модуль:

$$E = vB\sin 45^\circ = \frac{vB}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{B} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Обратите внимание: силы равны по модулю в обоих влётах, потому что $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$ — поэтому одно и то же E годится для обеих скоростей.

4. Два возможных набора направлений. Выберем $\vec{B}$ так, чтобы он был направлен вправо-вниз: $\vec{B} = \dfrac{B}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})$. Тогда

$$\vec{E} = -\vec{v}_1 \times \vec{B} = -v\,\hat{x} \times \frac{B}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y}) = \frac{vB}{\sqrt{2}}\,\hat{x} \times \hat{y} = \frac{vB}{\sqrt{2}}\,\hat{z},$$

то есть $\vec{E}$ направлен на нас. Тот же $\vec{E}$ получим из второго влёта: $-v\hat{y} \times \frac{B}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y}) = \frac{vB}{\sqrt{2}}\hat{z}$. Если $\vec{B}$ направить в противоположную сторону (влево-вверх), то $\vec{E}$ тоже меняет знак: от нас. Других вариантов нет: $\vec{B}$ вдоль прямой $y = -x$ в одну из двух сторон, $\vec{E}$ определяется однозначно по $\vec{B}$.

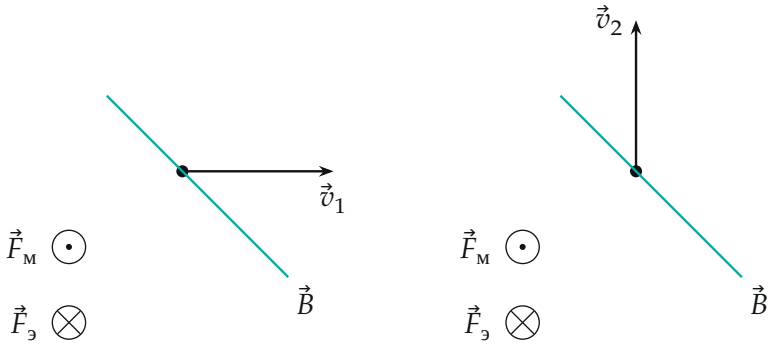


Рис. 3. Силы на электрон в двух влётах для случая $\vec{E}$ «на нас»: $\vec{F}_э = -e\vec{E}$ направлена от нас (⊗), $\vec{F}_м = -e\vec{v} \times \vec{B}$ — на нас (⊙); они равны по модулю.

Проверка. Размерность: E/B — скорость, В/м/Тл = м/с. Предельный случай: если бы поле $\vec{B}$ было перпендикулярно скорости ($\sin\alpha = 1$), получили бы привычный селектор скоростей $E = vB$; здесь угол 45°

уменьшает магнитную силу в $\sqrt{2}$ раз, поэтому и E в $\sqrt{2}$ раз меньше. Проверка силы в рисунке 3: для первого влёта $\vec{v}_1 \times \vec{B}$ направлено от нас ($\hat{x} \times (\hat{x} - \hat{y}) = -\hat{z}$), сила на электрон $-e(\cdot)$ — на нас, электрическая $-e\vec{E}$ при $\vec{E}$ на нас — от нас; для второго влёта $\hat{y} \times (\hat{x} - \hat{y}) = -\hat{z}$ — тот же результат.

Ответ. $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости рисунка («на нас» либо «от нас»); $\vec{B}$ лежит в плоскости рисунка вдоль прямой $y = -x$ (45° к скорости первого электрона и 135° к скорости второго, либо наоборот — направления $\vec{E}$ и $\vec{B}$ меняются вместе); $\dfrac{E}{B} = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$.