Призма и лазер

Задача 5. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 5] На призму, сечение которой имеет вид равнобедренного прямоугольного треугольника, перпендикулярно нижней грани падает луч от лазерной указки. Каким должен быть показатель преломления n материала, из которого сделана призма, чтобы свет от указки вышел из призмы наружу только через эту же грань?

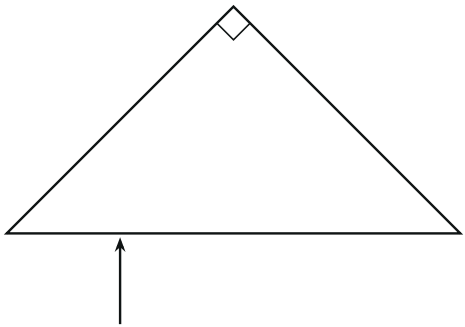


Рис. 1. Призма — равнобедренный прямоугольный треугольник; луч идёт перпендикулярно основанию (гипотенузе).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Луч входит в основание по нормали и потому не преломляется. Дальше он падает на боковую грань изнутри. Чтобы свет не вышел через боковые грани, на каждой из них должно быть полное внутреннее отражение (ПВО). Идея: найти угол падения на боковую грань, потом, куда пойдёт отражённый луч, и условие ПВО на каждой грани.

Обозначения. Показатель преломления воздуха 1, призмы — n. Угол падения — угол между лучом и нормалью к грани. α — угол падения на боковую грань, α_0 — предельный угол ПВО.

1. Угол падения на левую боковую грань. Основание горизонтально, боковые грани наклонены к нему под 45° (углы при основании равнобедренного прямоугольного треугольника). Луч перпендикулярен основанию, нормаль перпендикулярна боковой грани, поэтому угол между лучом и нормалью равен углу между основанием и гранью (рис. 2):

$$\alpha = 45^\circ.$$

Обратите внимание: угол падения считается от нормали, а не от грани. Угол между лучом и гранью равен $90° - \alpha$; здесь он тоже $45°$, и можно спутать одно с другим, но при другом угле призмы эти числа различны.

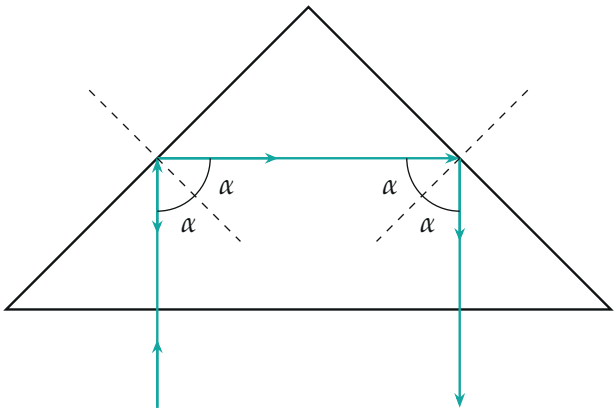


Рис. 2. Ход луча при ПВО на обеих боковых гранях: вверх, налево–направо по горизонтали, вниз и наружу через основание. Пунктир — нормали к боковым граням, $\alpha = 45°$ — угол падения (равный углу отражения).

2. ПВО на левой грани. Свет из призмы в воздух проходит, если выполняется закон Снеллиуса $n \sin\alpha = \sin\beta$ с $\beta \leq 90°$ (углу преломления в воздухе). Если $n \sin\alpha > 1$, преломлённого луча нет — это и есть ПВО:

$$n \sin\alpha > 1, \qquad n \sin 45° > 1, \qquad n > \sqrt{2} \approx 1{,}41.$$

Для обычного стекла ($n \approx 1{,}5$) условие выполнено. Предельный угол α_0 даёт $\sin\alpha_0 = 1/n$; при $n > \sqrt{2}$ он меньше $45°$.

3. Куда идёт отражённый луч. Закон отражения: угол отражения равен углу падения, отражённый луч лежит в той же плоскости. Падающий луч идёт вертикально вверх, нормаль повёрнута на $45°$, и отражённый луч поворачивается на $90°$: он идёт горизонтально к правой грани (рис. 2).

4. Правая грань. Горизонтальный луч падает на правую боковую грань тоже под $45°$ к нормали (грань наклонена к горизонту на $45°$, как и левая, а нормали двух граней перпендикулярны). Значит условие $n > \sqrt{2}$ гарантирует ПВО и здесь; отражённый луч идёт вертикально вниз —

антипараллельно входному. Две перпендикулярные грани вернули луч назад.

5. Выход через основание. Вертикальный луч падает на основание по нормали: угол падения $0°$, ПВО нет (при нулевом угле падения условие $n\sin\alpha > 1$ не выполняется), и свет выходит наружу. Так что только через основание.

Для сравнения (рис. 3): при $n < \sqrt{2}$ уже на первой боковой грани $n\sin 45° < 1$, преломлённый луч существует, свет выходит через боковую грань.

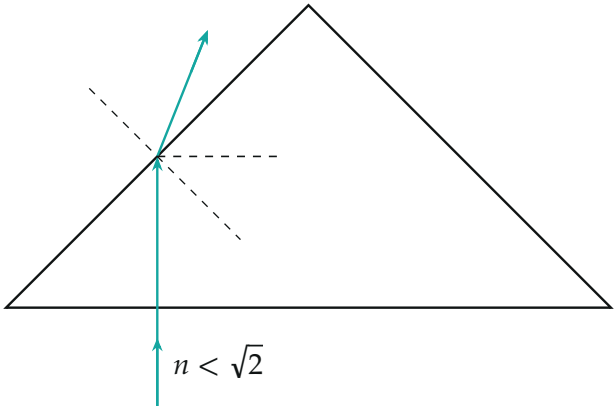


Рис. 3. При $n < \sqrt{2}$ часть света выходит через боковую грань (сплошная стрелка), остальное отражается (пунктир).

Проверка. Размерность: n безразмерно. Предельный случай: $n = \sqrt{2}$ — угол падения $45°$ равен предельному, преломлённый луч скользит вдоль грани, поэтому условие строгое: $n > \sqrt{2}$. Проверка на реальном материале: у стекла $n = 1{,}5$ предельный угол $\arcsin(1/1{,}5) \approx 41{,}8° < 45°$, ПВО есть; у воды $n = 1{,}33$ предельный угол $\approx 48{,}8° > 45°$, ПВО нет. Условие не зависит от того, в какую точку основания попал луч: правая половина основания даёт тот же ход зеркально. Смысл: прямоугольная призма — уголковый отражатель, возвращающий луч назад в обратном направлении.

Ответ. $n > \sqrt{2} \approx 1{,}41$.