Чупа-чупс в углу

Задача 6. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 6] «Чупа-чупс стоял в углу…» За что его поставили, неясно, но стоять ему не очень-то хотелось. Вот он и стал постепенно отставлять свою «ножку» всё дальше вдоль биссектрисы того прямого угла между стенками, в который его поставили, а «головой» опираясь о стенки (см. рисунок). При каком угле α между ножкой и полом чупа-чупс упадёт? Считать, что вся его масса сосредоточена в однородной шарообразной «голове» радиусом R, расстояние от центра головы до конца ножки равно l, коэффициент трения головы о стенки угла — μ_1, а ножки об пол — μ_2. Решите задачу в общем виде, а затем проведите численный расчёт угла α для случая $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}6$, $l = 4R$.

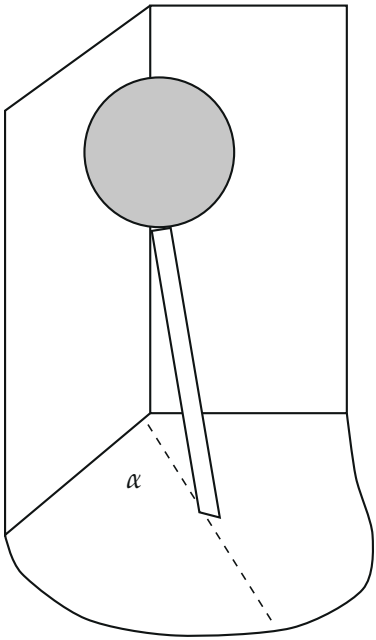


Рис. 1. Чупа-чупс в углу: голова касается обеих стенок, ножка стоит на полу. Пунктир — биссектриса угла на полу.

▲ **Решение. Что происходит.** Чупа-чупс держится силами трения о две стенки и о пол. Чем ниже ножка, тем сильнее голова давит на стенки и

тем большее трение нужно. Падение начинается, когда трения исчерпаны одновременно: голова скользит вниз по стенкам, а ножка — по полу от угла. Класс задачи: равновесие тела при предельном трении; помогает симметрия относительно вертикальной плоскости, проходящей через биссектрису.

Обозначения. m — масса, C — центр головы, P — конец ножки. N и F — нормальная сила и сила трения со стороны одной стенки (у двух стенок они одинаковы по симметрии), N_2 и F_2 — нормальная сила и сила трения пола. Плечи считаем в плоскости симметрии (рис. 2).

1. Силы от стенок. Голова касается каждой стенки в одной точке. Нормальные силы горизонтальны и перпендикулярны своим стенкам: две силы N под прямым углом друг к другу дают равнодействующую $\sqrt{2}N$ вдоль биссектрисы, от угла (рис. 3). Голова катится и скользит по стенкам, оставаясь в контакте с обеими, поэтому её центр движется только вертикально. Скорость точки касания складывается из скорости центра (вертикальна) и скорости при вращении головы вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной биссектрисе (для такой оси скорость точки касания тоже вертикальна). Значит трение стенок вертикально и направлено вверх: суммарно $2F$.

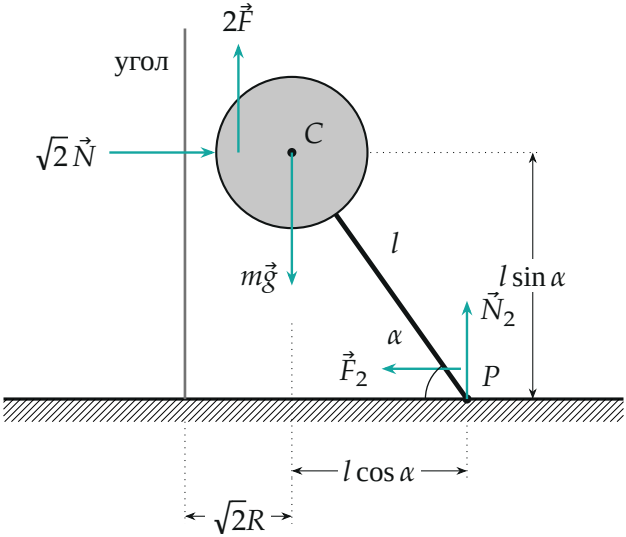


Рис. 2. Вид сбоку в плоскости симметрии: силы на чупа-чупс. Стенки видны с ребра (вертикальная линия).

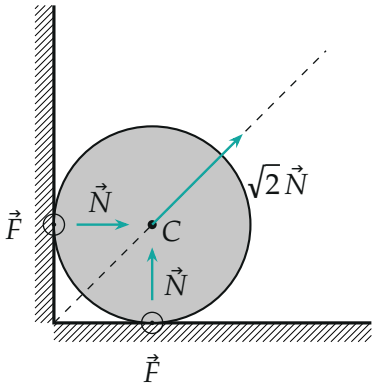


Рис. 3. Вид сверху: голова касается обеих стенок; нормальные силы $\vec{N}$ (стрелки) дают $\sqrt{2}\,\vec{N}$ вдоль биссектрисы, трения $\vec{F}$ направлены вверх, к нам (⊙).

2. Условия скольжения. В момент начала падения проскальзывают сразу оба контакта: это единственная возможность двигаться (голова вниз, ножка наружу), поэтому обе силы трения предельны:

$$F = \mu_1 N, \qquad F_2 = \mu_2 N_2.$$

Ножка стремится поехать от угла, значит сила трения пола $\vec{F}_2$ направлена к углу.

3. Силы по горизонтали и по вертикали. Чупа-чупс покоится, сумма сил равна нулю. Проекция на горизонталь вдоль биссектрисы (от угла) и на вертикаль вверх:

$$\sqrt{2}\,N - F_2 = 0, \qquad 2F + N_2 - mg = 0.$$

Отсюда $N = \dfrac{\mu_2 N_2}{\sqrt{2}}$ и $N_2 = mg - 2\mu_1 N$. Подставим вторую формулу в первую:

$$N_2 = \frac{mg}{1 + \sqrt{2}\,\mu_1\mu_2}, \qquad N = \frac{\mu_2\, mg}{\sqrt{2} + 2\mu_1\mu_2}.$$

4. Сумма моментов. Возьмём моменты относительно точки P — в уравнение не войдут N_2 и F_2 (их линии действия проходят через P). Плечи (рис. 2): у $m\vec{g}$ — $l\cos\alpha$; у $\sqrt{2}\,\vec{N}$ (горизонтальна, приложена на высоте центра головы) — $l\sin\alpha$; у $2\vec{F}$ (вертикальна) — $l\cos\alpha + R/\sqrt{2}$, так как точки касания со стенками смещены от центра к углу на $R/\sqrt{2}$ вдоль биссектрисы. Моменты $\sqrt{2}\vec{N}$ и $2\vec{F}$ направлены против момента силы тяжести, поэтому

$$mg\,l\cos\alpha = \sqrt{2}\,N\,l\sin\alpha + 2F\Big(l\cos\alpha + \frac{R}{\sqrt{2}}\Big).$$

Подставим $F = \mu_1 N$ и N из пункта 3. Член $2\mu_1 l\cos\alpha$ с обеих сторон сокращается, и остаётся

$$\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha = \frac{\mu_1\mu_2 R}{l}.$$

Обратите внимание: остался простой вид потому, что сократились N и m: ответ не зависит от массы.

5. Решение для α. Введём угол φ с $\operatorname{tg}\varphi = \mu_2$, то есть $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}$.

Тогда $\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha = \sqrt{1+\mu_2^2}\,\cos(\alpha+\varphi)$ и

$$\alpha = \arccos\Big(\frac{R}{l}\cdot\frac{\mu_1\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\Big) - \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}.$$

Числа: $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}6$, $l = 4R$: $\sqrt{1+\mu_2^2} = 1{,}166$, правая часть уравнения пункта 4 равна $0{,}36/4 = 0{,}09$, $\cos(\alpha+\varphi) = 0{,}09/1{,}166 = 0{,}0772$, $\alpha+\varphi = 85{,}6°$, $\varphi = \operatorname{arctg}0{,}6 = 31{,}0°$:

$$\alpha \approx 54{,}6°.$$

6. Почему при меньших углах он падает. Пока чупа-чупс стоит, трения могут быть меньше предельных, и чем меньше α, тем большие они нужны. Левая часть уравнения пункта 4 (рис. 4) убывает с ростом α: при

$\alpha > \alpha_0$ запас трения есть (стоит), при $\alpha < \alpha_0$ не хватает (падает).

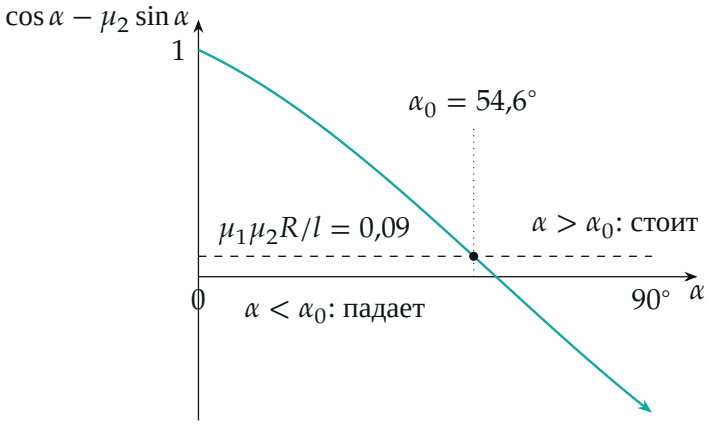


Рис. 4. Кривая — левая часть уравнения, пунктир — уровень $\mu_1\mu_2 R/l = 0{,}09$; пересечение — угол α_0. При меньших углах кривая выше уровня.

Проверка. Размерность: R/l и μ безразмерны. Второй способ в частном случае $\mu_1 = 0$ (гладкие стенки) или $R \to 0$ (голова — точка): правая часть уравнения пункта 4 обращается в нуль, и $\operatorname{tg}\alpha = 1/\mu_2$. Получим это независимо: все силы, кроме реакции пола, проходят через центр головы (при гладких стенках нормали направлены на центр), значит и реакция пола проходит через него, то есть направлена вдоль ножки. Её наклон к вертикали даёт $F_2/N_2 = \operatorname{ctg}\alpha$, и в предельном случае $\operatorname{ctg}\alpha = \mu_2$ — то же условие. Предел гладкого пола $\mu_2 \to 0$: из формулы $\alpha_0 \to 90°$, чупа-чупс падает сразу, как и должно быть. Предел больших μ_1: правая часть растёт, α_0 уменьшается — чем сильнее трение о стенки, тем дальше можно отставить ножку. Численно: при $\alpha = 54{,}6°$ левая часть уравнения $0{,}579 - 0{,}6 \cdot 0{,}816 = 0{,}090$, правая — 0,09.

Ответ. $\alpha = \arccos\left(\dfrac{R}{l} \cdot \dfrac{\mu_1\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\right) - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}$; при $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}6$, $l = 4R$: $\alpha \approx 54{,}6°$.