Четыре пластины конденсатора

Задача 8. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 8] Электрическая ёмкость плоского конденсатора, состоящего из двух одинаковых параллельных друг другу пластин, находящихся на расстоянии d, равна C. Четыре такие пластины расположили параллельно друг другу на расстоянии d, соединив две внешние пластины тонким проводом. От одной из внутренних пластин отрезали и удалили половину. Какова ёмкость такой системы проводников, если её измеряют между указанными на рисунке точками A и B?



Рис. 1. Четыре пластины; верхняя и нижняя соединены проводом, вторая сверху — половинная.

▲ **Решение. Что происходит.** Пластины большие, расстояния между ними малы, поэтому поле есть только между обращёнными друг к другу поверхностями и однородно (краевыми эффектами пренебрегаем). Идея: разобрать систему на простые плоские конденсаторы из обращённых друг к другу участков пластин, найти их ёмкости и собрать схему. Пластины пронумерованы сверху вниз: 1 и 4 — внешние (соединены проводом, одинаковый потенциал, назовём этот узел O), 2 — половинная, с точкой A, 3 — целая, с точкой B. Ёмкость исходного конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d$, S — площадь пластины.

Обозначения. S — площадь пластины, d — расстояние между соседними. Левая половина — та часть, где нет пластины 2 (площадь $S/2$), правая — где есть все четыре пластины (тоже $S/2$). Заряды на внешних сторонах внешних пластин и поле снаружи равны нулю: при измерении между A и B на них нет заряда, и вся система в целом нейтральна. Поэтому каждая поверхность работает только вместе с обращённой к ней поверхностью.

1. Правая половина (все четыре пластины, расстояния d). Здесь три конденсатора площадью $S/2$ и зазором d: между пластинами 1–2, 2–3 и 3–4. Ёмкость каждого

$$C_{12} = C_{23} = C_{34}^{\text{прав}} = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d} = \frac{C}{2}.$$

2. Левая половина (нет пластины 2). Пластина 3 слева обращена вверх сразу к пластине 1, через зазор $2d$, а вниз — к пластине 4 через d:

$$C_{13}^{\text{лев}} = \frac{\varepsilon_0 S/2}{2d} = \frac{C}{4}, \qquad C_{34}^{\text{лев}} = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d} = \frac{C}{2}.$$

Обратите внимание: левая половина пластины 3 не «спрятана» за пластиной 2 — там её нет, поэтому пластина 3 работает с пластиной 1 через зазор $2d$. Правая половина пластины 3 с пластиной 1 не взаимодействует: между ними стоит пластина 2, которая экранирует.



Рис. 2. Система разобрана на участки: слева пластины 1, 3, 4, справа все четыре. У каждого зазора подписана ёмкость соответствующего участка (площадь $S/2$).

3. Эквивалентная схема. Пластины 1 и 4 соединены, это один узел O. К нему подключены: пластина 2 (узел A) — одним конденсатором $C_{OA} = C_{12} = C/2$; пластина 3 (узел B) — тремя конденсаторами в параллель: $C_{34}^{\text{прав}}$, $C_{34}^{\text{лев}}$ и $C_{13}^{\text{лев}}$:

$$C_{OB} = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} + \frac{C}{4} = \frac{5C}{4}.$$

Между A и B есть ещё прямой конденсатор $C_{AB} = C_{23} = C/2$. Получилась схема (рис. 3): путь $A \to O \to B$ — два конденсатора последовательно, и он включён параллельно C_{AB}.

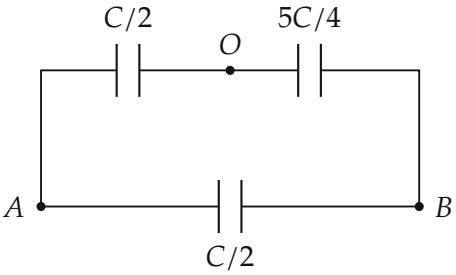


Рис. 3. Эквивалентная схема между точками A и B: O — узел из двух внешних пластин.

4. Ёмкость цепочки $A \to O \to B$**.** Ёмкости последовательных конденсаторов складываются как обратные величины:

$$C_{AOB} = \left(\frac{1}{C/2} + \frac{1}{5C/4}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{C} + \frac{4}{5C}\right)^{-1} = \frac{5C}{14}.$$

5. Полная ёмкость. Параллельные ветви складываются:

$$C_\Sigma = C_{AB} + C_{AOB} = \frac{C}{2} + \frac{5C}{14} = \frac{7C + 5C}{14} = \frac{6C}{7}.$$

Проверка. Второй способ — потенциалы узлов. Пусть $\varphi_A = U$, $\varphi_B = 0$, потенциал внешних пластин $\varphi_O = x$ неизвестен. Внешние пластины соединены только друг с другом, их суммарный заряд равен нулю:

$$\frac{C}{2}(x - U) + \frac{5C}{4}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{7}U.$$

Заряд на пластине A (на обращённых поверхностях):

$$q_A = C_{AB}U + C_{OA}(U - x) = \frac{C}{2}U + \frac{C}{2}\cdot\frac{5}{7}U = \frac{6}{7}CU,$$

то есть $C_\Sigma = q_A/U = 6C/7$. Предельный случай: если бы вторая пластина была целой, все три конденсатора C_{OA}, C_{AB}, C_{OB} были бы равны C, и ёмкость стала бы $C + C/2 = 3C/2$. У половинной пластины напротив A вдвое меньше поверхности, и ёмкость меньше: $6C/7 < 3C/2$. Смысл: измерили, как заряд q_A на A зависит от напряжения U между A и B.

Ответ. $C_\Sigma = \dfrac{6C}{7}$.