Жгут и пружина

Задача 9. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 9] Резиновый жгут и пружина в нерастянутом состоянии имеют одинаковые длины. Коэффициент жёсткости пружины равен $k = 4$ Н/м. График зависимости модуля f силы растяжения жгута от его удлинения x приведён на рисунке. Пружина и жгут очень лёгкие. Пружину подвешивают за один из концов к потолку, а к её второму концу прикрепляют конец жгута (при этом пружина и жгут оказываются соединёнными последовательно).

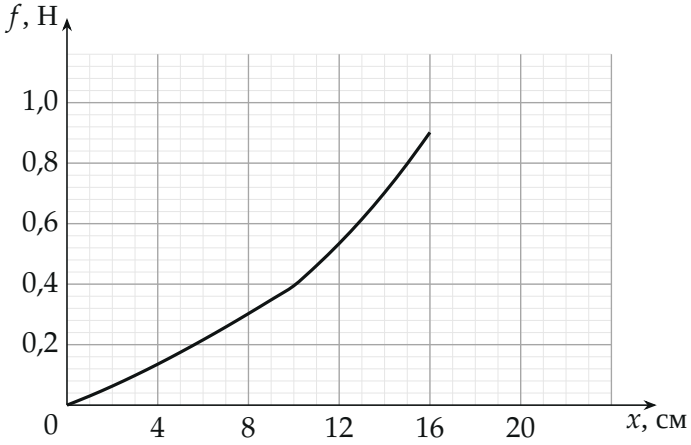


Рис. 1. График силы растяжения жгута $f(x)$ (перерисован по точкам с оригинального графика).

1) К свободному нижнему концу жгута прикладывают направленную вниз силу с модулем $F = 0{,}7$ Н. На какую суммарную величину X растянутся пружина и жгут?
2) Найдите массу m груза, который нужно подвесить к свободному нижнему концу жгута, чтобы суммарное удлинение системы в положении равновесия было равно $L = 20$ см.
3) Оцените энергию E, которая будет запасена в жгуте при подвешивании к его свободному нижнему концу покоящегося груза найденной выше массой m.

4) Груз этой массой m, подвешенный к свободному нижнему концу жгута, заставили свободно колебаться с амплитудой $A = 2$ мм вокруг положения равновесия. Пренебрегая трением, оцените, чему будет равен период таких колебаний груза.

При решении задачи считайте, что ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Пружина и жгут лёгкие, поэтому для любого их участка сумма сил равна нулю, и сила упругости в каждом сечении одна и та же, её создаёт нижняя нагрузка. Значит у пружины и жгута *сила общая, а удлинения складываются*. Жгут нелинеен, поэтому его удлинение берём по графику; пружину описывает закон Гука. Класс задачи: последовательное соединение упругих элементов с нелинейной характеристикой, графическое решение.

Обозначения. x — удлинение жгута, $x_\text{п}$ — удлинение пружины, $X = x + x_\text{п}$ — суммарное удлинение, F — сила в системе (рис. 2).

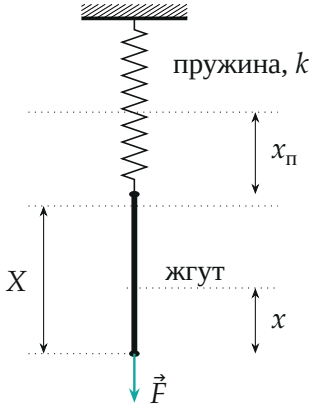


Рис. 2. Пружина и жгут последовательно. Пунктир — положения концов до нагрузки (длины одинаковы); $X = x_п + x$ — смещение нижнего конца.

Пункт 1. Растяжение под силой $F = 0{,}7$ **Н.** Нижний конец жгута тянет сила F, и такая же сила действует на жгут и на пружину. По графику (рис. 3) жгуту с силой $f = 0{,}7$ Н соответствует $x = 14$ см. Пружина:

закон Гука $kx_{\text{п}} = F$,

$$x_{\text{п}} = \frac{F}{k} = \frac{0{,}7}{4} = 0{,}175 \text{ м} = 17{,}5 \text{ см}.$$

Удлинения складываются:

$$X = x + x_{\text{п}} = 14 + 17{,}5 = 31{,}5 \text{ см}.$$

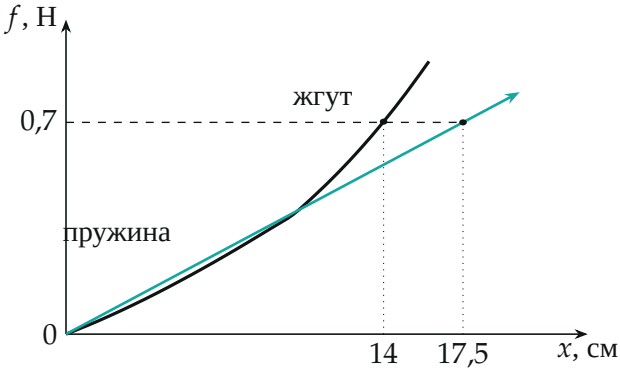


Рис. 3. При $F = 0{,}7$ Н удлинение жгута 14 см (по кривой), пружины 17,5 см (по прямой $f = kx$): удлинения при одной силе складываются.

Пункт 2. Масса груза при $L = 20$ см. Груз покоится: сила тяжести mg равна силе в системе, то же mg действует и на жгут, и на пружину. Для жгута она равна $f(x)$, для пружины — $kx_{\text{п}}$. По условию суммарное удлинение $x + x_{\text{п}} = L$, значит $x_{\text{п}} = L - x$:

$$mg = f(x) = k(L - x).$$

Решаем уравнение $f(x) = kL - kx$ графически (рис. 4): правая часть — прямая, проходящая через точки $x = 0, f = kL = 0{,}8$ Н и $x = L, f = 0$; пересечение с кривой даёт $x_1 = 10$ см, $f(x_1) = 0{,}4$ Н:

$$m = \frac{f(x_1)}{g} = \frac{0{,}4}{10} = 0{,}04 \text{ кг} = 40 \text{ г}.$$

Проверка подстановкой: $k(L - x_1) = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$ Н, совпадает с $f(x_1)$.

Пункт 3. Энергия в жгуте. Груз опускали (и жгут растягивался) медленно, силой $f(x)$ в каждый момент. Энергия, запасённая в жгуте, равна работе этой силы $\int_0^{x_1} f\,dx$, то есть площади под графиком от 0 до x_1 (закрашена на рис. 4). Одна большая клетка графика — 0,2 Н×4 см = 8 мДж; под кривой помещается примерно 2,3 клетки:

$$E \approx 2{,}3 \cdot 8 \text{ мДж} \approx 18 \text{ мДж}.$$

Обратите внимание: площадь треугольника под хордой (от начала до точки $(x_1, f(x_1))$) — $\frac{1}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 20$ мДж; кривая лежит ниже хорды, поэтому настоящая энергия меньше: 18 мДж.

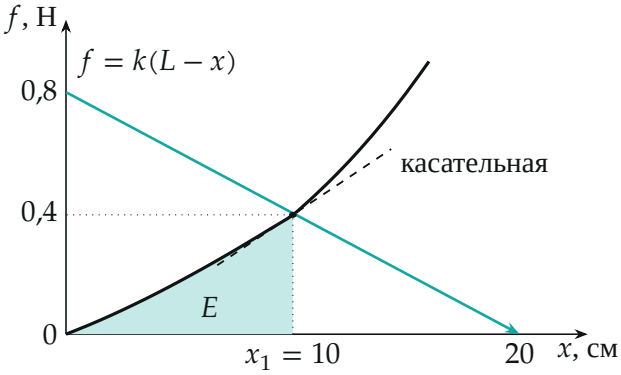


Рис. 4. Графическое решение: пересечение кривой $f(x)$ и прямой $f = k(L-x)$ даёт $x_1 = 10$ см, $f = 0{,}4$ Н. Бирюзовая площадь — энергия E жгута. Штрих — касательная к кривой в точке x_1 (наклон около 5 Н/м).

Пункт 4. Период малых колебаний. Амплитуда 2 мм очень мала по сравнению с растяжением жгута (10 см): на таком участке кривую можно заменить касательной в точке x_1 (рис. 4), то есть у жгута есть эффективная жёсткость $k_ж = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_1}$. По графику слева от x_1 наклон около 4,7 Н/м, справа около 6,3 Н/м (на кривой небольшой излом), поэтому

$$k_ж \approx 5 \text{ Н/м}.$$

Пусть груз сместился от равновесия на Δ вниз. Силу, возвращающую

груз, создаёт общая прибавка ΔF в пружине и жгуте; удлинения прибавляются: $\Delta = \Delta F/k + \Delta F/k_ж$, то есть пружина и жгут заменяются одной пружиной жёсткости

$$k_э = \frac{kk_ж}{k + k_ж} = \frac{4 \cdot 5}{9} \approx 2{,}2 \text{ Н/м}.$$

Период колебаний груза массой m на такой пружине:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_э}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}04}{2{,}2}} \approx 0{,}84 \text{ с}.$$

Обратите внимание: при малых колебаниях период не зависит от амплитуды A; она нужна только для проверки малости: удлинение жгута меняется всего на $A\,\dfrac{k}{k + k_ж} \approx 0{,}9$ мм, график на этом участке практически прямой.

Проверка. Размерность: кг/(Н/м) $=$ с^2. Предел: если бы жгут был абсолютно жёстким ($k_ж \to \infty$), $k_э = k$, $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}63$ с; наш период больше (0,84 с), как и должно быть для более податливой системы. Пункт 2 проверен подстановкой; пункт 3: $E \approx 18$ мДж меньше 20 мДж (кривая загнута вверх и лежит ниже хорды), как и положено. Смысл: решение держится на одной мысли — у лёгких элементов, соединённых последовательно, сила общая, а удлинения складываются.

Ответ. 1) $X = 31{,}5$ см; 2) $m = 40$ г; 3) $E \approx 18$ мДж (± 2 мДж); 4) $T \approx 0{,}84$ с ($\pm 0{,}05$ с).