Солнечный зайчик

Задача 10. [МОШ 2011/12, 11 класс, задача 10] Летом в ясный солнечный день школьник вышел во двор своего дома с прямоугольным зеркальцем в руках. Поймав зеркальцем солнечный свет, он направил зайчик перпендикулярно на неосвещённую стену дома и стал постепенно отходить от неё. Оказалось, что вначале зайчик имел квадратную форму со стороной $d = 5$ см, а потом его края стали размываться, и он постепенно стал практически круглым, с небольшим размытием по краям. Пренебрегая явлением дифракции, объясните наблюдаемый эффект и оцените, при каком расстоянии L от стены ширина размытой области на краю зайчика станет менее 10% от диаметра его ярко освещённой круглой части. Размер зеркальца 5×7 см, угловой размер Солнца $\varphi \approx 0{,}01$ радиана.

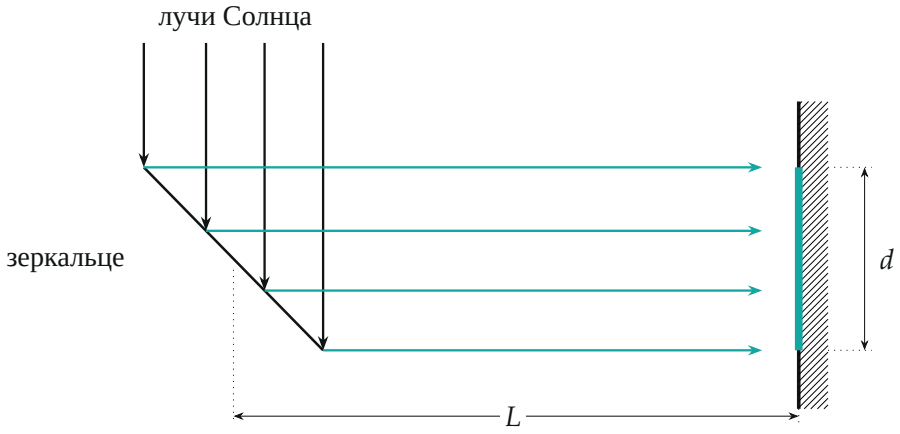


Рис. 1. Схема опыта (вид сбоку, масштаб не соблюдён). Зеркальце наклонено так, что сечение отражённого пучка — квадрат со стороной d; пучок падает на стену перпендикулярно.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Зайчик — это отражённый пучок, упавший на стену. Если бы Солнце было точкой, пучок был бы параллельным, и зайчик повторял бы форму пучка на любом расстоянии. Но Солнце — диск с угловым размером $\varphi \approx 0{,}01$: лучи от разных его точек идут под углами до φ друг к другу. Поэтому от каждой точки зеркальца к

стене идёт не луч, а конус с углом φ, а на стене он даёт пятно диаметром φL — изображение Солнца. Зайчик — это сумма таких пятен от всех точек зеркальца. Идея: сравнить размер пучка d и размер пятна φL.

Обозначения. $d = 5$ см — сторона квадратного сечения пучка, $\varphi = 0{,}01$ — угловой размер Солнца, L — расстояние от зеркальца до стены, w — ширина размытой полосы на краю зайчика.

1. Форма пучка. Отражённый пучок имеет сечение, равное проекции зеркальца на плоскость, перпендикулярную лучам: стороны 5 см и $7\cos\theta$, где θ — угол падения на зеркальце. Зайчик вначале квадратный со стороной $d = 5$ см, значит $7\cos\theta = 5$, $\theta \approx 44°$ (рис. 1). Зайчик вблизи — точный отпечаток этого сечения.

2. Конус от одной точки зеркальца. Закон отражения сохраняет углы между лучами, поэтому лучи от точки Солнца с угловым отклонением $\pm\varphi/2$ уходят от зеркальца в пределах конуса с углом φ. На расстоянии L диаметр пятна от одной точки зеркальца — φL (малый угол: дуга равна φL). Вклад каждой точки зеркальца — такой круг, сдвинутый на расстояние между точками (рис. 2).

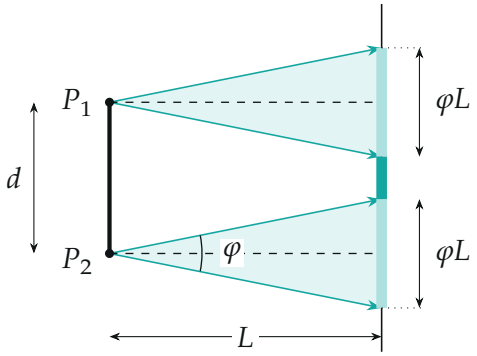


Рис. 2. Две крайние точки P_1 и P_2 зеркальца (сечение пучка), конус каждой имеет угол φ. На стене: яркая середина (бирюза), по краям — полутень шириной φL; угол φ на рисунке преувеличен.

3. Вблизи стены ($\varphi L \ll d$). Пятно от одной точки мало, края зайчика размываются узкой полосой шириной $w \approx \varphi L$ (рис. 2). Внутри остаётся ярко освещённая часть шириной $d - \varphi L$: зайчик ещё «квадратный с

размытыми краями». Например, при $L = 1$ м размытие $\varphi L = 1$ см, при $d = 5$ см — пятая часть стороны.

4. Далеко от стены ($\varphi L \gg d$). Теперь пятно от одной точки намного больше сечения пучка: все точки зеркальца дают почти один и тот же круг диаметром φL, лишь сдвинутый не более чем на d. Зеркальце «видится как точка», а зайчик — изображение Солнца: круг диаметром φL. Края этого круга размыты на $w \approx d$ (размер зеркальца): точки зеркальца сдвигают круг на величину порядка d.

5. Переход. Режимы сменяются при $\varphi L \approx d$:

$$L_0 \approx \frac{d}{\varphi} = \frac{0{,}05}{0{,}01} = 5 \text{ м}.$$

Квадрат превращается в закруглённый, при $L \gg 5$ м — в круг (рис. 3). Это и есть наблюдаемая картина.

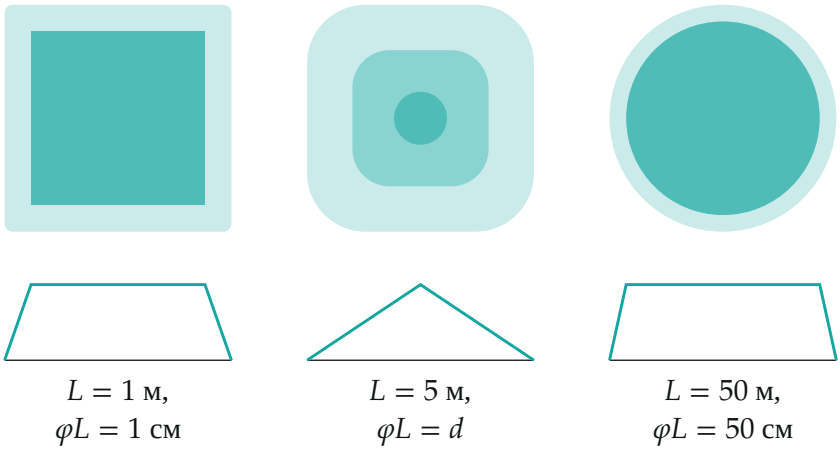


Рис. 3. Вид зайчика на стене на трёх расстояниях (сверху; форма каждого приведена к одной ширине) и профиль освещённости вдоль диаметра (снизу). Тёмная бирюза — ярко освещённая часть, светлая — полутень. Профиль — трапеция: основание $d + \varphi L$, верх $|d - \varphi L|$, ширина склона — меньшая из двух величин.

6. Условие задачи. Размытие $w \approx d$ (пункт 4) станет меньше 10% диаметра ярко освещённой круглой части. Диаметр этой части прибли-

зительно φL (точнее $\varphi L - d$, но d мало):

$$w \approx d < 0{,}1\,\varphi L \quad \Rightarrow \quad L > \frac{d}{0{,}1\,\varphi} = \frac{0{,}05}{0{,}1 \cdot 0{,}01} = 50 \text{ м}.$$

Если брать диаметр $\varphi L - d$, получится $L > 11\,d/\varphi = 55$ м: оценка в пределах одного порядка, как и нужно.

Проверка. Размерность: d/φ — длина (угол безразмерен). Обе оценки согласованы: при $L = L_0 = 5$ м размытие φL в обоих режимах равно d, и формулы пунктов 3 и 4 дают одно значение. Ещё одно следствие: чем дальше стена, тем тусклее круг: освещённость падает как $(d/\varphi L)^2$ — вот почему на дальней стене зайчик бледный. Смысл: зайчик — свёртка двух размеров, формы зеркальца и изображения Солнца; побеждает больший.

Ответ. Из-за конечного углового размера Солнца каждая точка зеркальца даёт на стене пятно диаметром φL: вблизи ($\varphi L \ll d$) зайчик повторяет форму зеркальца (квадрат) с размытыми краями шириной φL, вдали ($\varphi L \gg d$) — изображение Солнца (круг диаметром φL) с краем, размытым на d. Размытие меньше 10% диаметра при $L > \dfrac{d}{0{,}1\,\varphi} \approx 50$ м.