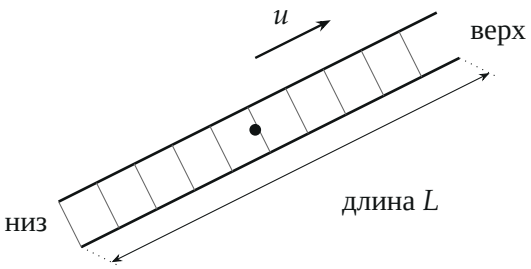
Эскалатор

Задача 1. [МОШ 2011/12, 7 класс, задача 1] Школьник Вася, стоя на эскалаторе, поднялся наверх за 1 мин. Его друг Петя, идя по эскалатору вверх, поднялся за 40 с. Сколько времени понадобится Пете, чтобы по тому же эскалатору спуститься вниз (против движения эскалатора), если он будет бежать со скоростью в три раза быстрее, чем идет?



Поясняющий рисунок: эскалатор длиной L едет вверх со скоростью u

▲ **Решение. Что происходит.** Человек на эскалаторе участвует в двух движениях сразу: его везёт лента и он сам шагает по ней. Скорость относительно здания (земли) — векторная сумма скорости эскалатора и скорости человека относительно ленты (закон сложения скоростей). Движение вдоль эскалатора прямолинейное, поэтому вдоль одной оси скорости просто складываются с учётом знака. Длина эскалатора L в каждом случае одна и та же, и из неё получается всё остальное; сама L в ответ не войдёт.

Обозначения. L — длина эскалатора, u — скорость эскалатора, v — скорость Пети относительно ленты при ходьбе (при беге — $3v$). Ось направим вдоль эскалатора вверх.

1. Вася стоит. Его скорость равна скорости ленты u. Путь L за $t_1 = 60$ с:

$$L = u\,t_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{L}{60\text{ с}}.$$

2. Петя идёт вверх. Скорость относительно здания $u + v$ (скорости

направлены в одну сторону). Время $t_2 = 40$ с:

$$L = (u + v)\, t_2 \quad \Rightarrow \quad u + v = \frac{L}{40\text{ с}}.$$

Вычитаем: скорость ходьбы Пети относительно ленты

$$v = \frac{L}{40\text{ с}} - \frac{L}{60\text{ с}} = \frac{L}{120\text{ с}}.$$

3. Петя бежит вниз. Относительно ленты его скорость $3v = \frac{L}{40\text{ с}}$ направлена вниз, скорость ленты $u = \frac{L}{60\text{ с}}$ направлена вверх. В проекции на ось вверх результирующая скорость

$$v_з = u - 3v = \frac{L}{60\text{ с}} - \frac{L}{40\text{ с}} = -\frac{L}{120\text{ с}},$$

знак минус: вниз, по модулю $\frac{L}{120\text{ с}}$. Знак важен: Петя бежит быстрее ленты ($3v > u$), поэтому действительно спускается, а не уезжает вверх.

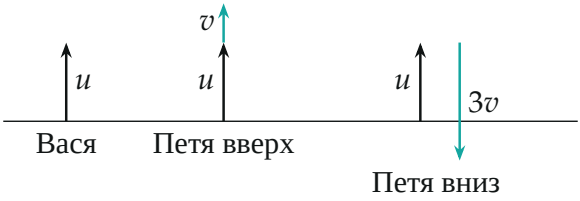


Рис. 1. Скорости вдоль эскалатора (длины в масштабе $u = 2$ клетки, $v = 1$ клетка, единица $L/(120\text{ с})$; ось — вверх по эскалатору): вверх — сумма $u + v$ в 3 клетки, вниз — разность u и $3v$ в 1 клетку вниз

4. Время спуска. Движение равномерное, путь L:

$$t_3 = \frac{L}{|v_з|} = \frac{L}{L/120\text{ с}} = 120\text{ с}.$$

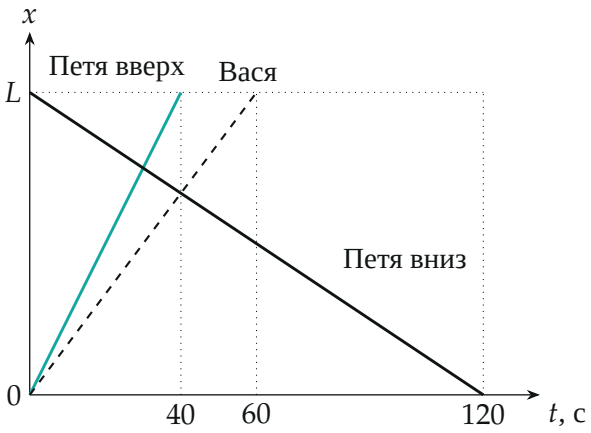


Рис. 2. Положение вдоль эскалатора ($x = 0$ — низ, $x = L$ — верх) от времени: Петя вверх (бирюзовая линия, 40 с), Вася (штриховая, 60 с), Петя вниз (чёрная, 120 с); чем круче линия, тем больше скорость

Обратите внимание.

- Нельзя рассуждать «бежит втрое быстрее, значит, и спустится втрое быстрее»: часть его скорости уходит на борьбу с движущейся вверх лентой, а скорость относительно здания — разность $3v - u$.

Проверка. Размерность: $L/(L/120\text{ с}) = \text{с}$. Второй способ: пусть $L = 120$ ступеней. Тогда лента едет $u = 2$ ступени/с, Петя идёт $v = 1$ ступень/с. Вверх: $2 + 1 = 3$ ступени/с, время $120/3 = 40$ с — совпало с условием. Вниз: бежит 3 ступени/с против ленты 2 ступени/с, итого $3 - 2 = 1$ ступень/с, время $120/1 = 120$ с. Смысл: бежать втрое быстрее ходьбы вниз выгодно мало — бег почти полностью уходит на преодоление ленты, поэтому спуск занимает втрое больше времени, чем подъём пешком.

Ответ. 120 с.