График скорости от пути

Задача 2. [МОШ 2011/12, 7 класс, задача 2] На рисунке изображен график зависимости скорости автомобиля v от пройденного им пути S. Какое расстояние проехал автомобиль за первые 2 минуты своего движения?

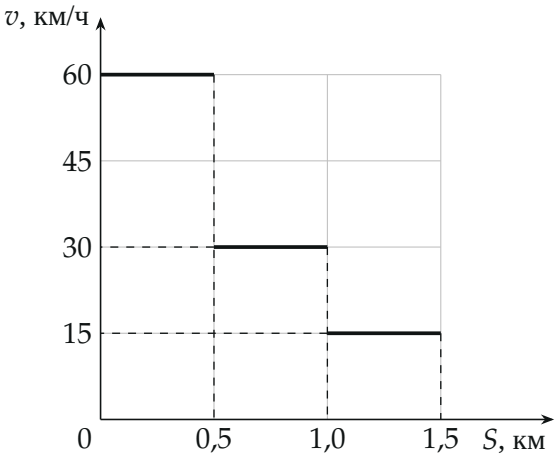

Рисунок к условию: ступенчатый график скорости от пути

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль едет участками, на каждом скорость постоянна: 60, 30, 15 км/ч. Длина каждого участка 0,5 км. Нужно узнать, где автомобиль окажется через 2 минуты после старта. Для этого находим время прохождения каждого участка по формуле равномерного движения $t = S/v$ и складываем, пока не наберём 2 минуты; остаток времени проводим на следующем участке. Внимание: график показывает скорость от пути, а не от времени, поэтому площадь под ним не равна пройденному пути.

Обозначения. $S_1 = S_2 = S_3 = 0{,}5$ км — длины участков, $v_1 = 60$, $v_2 = 30$, $v_3 = 15$ км/ч — скорости на них, t_1, t_2 — времена прохождения первых двух участков, $T = 2$ мин — время движения. Удобно перевести скорости в км/мин:

$$v_1 = \frac{60}{60} = 1 \text{ км/мин}, \qquad v_2 = 0{,}5 \text{ км/мин}, \qquad v_3 = 0{,}25 \text{ км/мин}.$$

1. Первый участок. Равномерное движение со скоростью v_1 на пути S_1:

$$t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5 \text{ мин} = 30 \text{ с}.$$

2. Второй участок.

$$t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}.$$

3. Где автомобиль через 2 минуты. За первые два участка (пройдено 1 км) уходит $t_1 + t_2 = 1{,}5$ мин < 2 мин, значит, к концу второго участка время ещё не вышло и автомобиль едет по третьему. Весь третий участок (0,5 км со скоростью 0,25 км/мин) автомобиль проходил бы 2 мин, а в запасе у него только $T - t_1 - t_2 = 0{,}5$ мин, так что третий участок будет пройден лишь частично (рис. 1).

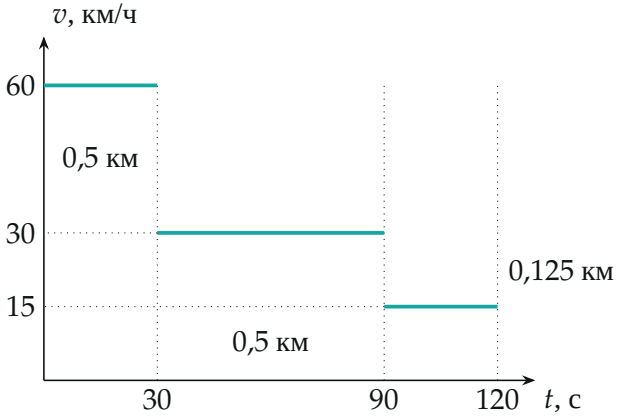

Рис. 1. Скорость от времени: путь за каждый отрезок — площадь прямоугольника под ступенью; вместе $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}125 = 1{,}125$ *км за* 120 *с*

4. Путь на третьем участке. Остаток времени $t_3 = T - t_1 - t_2 = 2 - 0{,}5 - 1 = 0{,}5$ мин автомобиль едет со скоростью v_3:

$$S_3' = v_3\, t_3 = 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 \text{ км}.$$

5. Весь путь.

$$S = S_1 + S_2 + S_3' = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}125 = 1{,}125 \text{ км}.$$

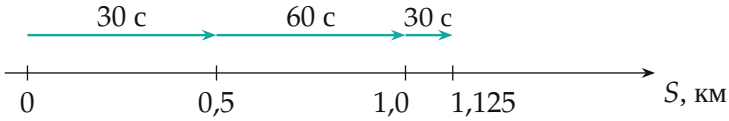

Рис. 2. Дорога: три участка, времена на каждом (30, 60 и 30 с, вместе 120 с) и пройденный путь

Обратите внимание.

- Площадь под графиком $v(S)$ не имеет смысла пути: он по оси абсцисс уже путь. Время находим как S/v, а не как площадь.
- Третий участок — неполный: из 2 минут, которые на него потребовались бы целиком, автомобиль использует только 0,5 минуты.

Проверка. Размерность: км/мин · мин = км. Время: 30 + 60 + 30 = 120 с = 2 мин. Оценка: если бы весь путь шёл на скорости 30 км/ч, за 2 мин получилось бы 1 км — ответ 1,125 км того же порядка. Смысл: на быстром участке автомобиль проводит мало времени, на медленных — много, поэтому две минуты уходят в основном на второй и третий участки.

Ответ. 1,125 км.