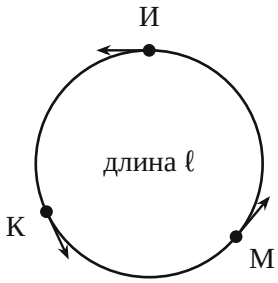
Бегуны по кругу

Задача 3. [МОШ 2011/12, 7 класс, задача 3] Школьницы Ирина, Карина и Марина бегают по кругу в одном направлении с постоянными скоростями. Ирина и Карина встречаются каждые 2 минуты. Карина и Марина встречаются каждые 3 минуты. Как часто встречаются Ирина и Марина?



Поясняющий рисунок: три бегуньи на круге (Ирина — И, Карина — К, Марина — М) бегут в одну сторону; соотношение скоростей заранее неизвестно, поэтому длины стрелок одинаковы условно

▲ **Решение.** **Что происходит.** Две бегуньи, бегущие в одну сторону, встречаются, когда та, что быстрее, обгоняет другую ровно на круг, то есть догоняет её. Поэтому время между встречами — это длина круга, делённая на разность скоростей по модулю. Удобно измерять скорости в «кругах за минуту»: тогда частота встреч двух бегуний равна модулю разности их скоростей. Какая из двух бегуний быстрее, неизвестно, поэтому разность скоростей может быть положительной или отрицательной, и ответов может быть два.

Обозначения. ℓ — длина круга, $v_{\text{И}}$, $v_{\text{К}}$, $v_{\text{М}}$ — скорости Ирины, Карины и Марины (м/мин), T_{ab} — время между встречами бегуний a и b.

1. Закон встреч. В системе отсчёта, связанной с одной из бегуний, вторая движется по кругу со скоростью, равной модулю разности скоростей, и встреча происходит каждый раз, когда она пробегает полный круг ℓ:

$$|v_a - v_b|\, T_{ab} = \ell.$$

2. Условие в виде уравнений. Ирина и Карина встречаются каждые 2 минуты, Карина и Марина — каждые 3:

$$|v_И - v_К| = \frac{\ell}{2}, \qquad |v_К - v_М| = \frac{\ell}{3}.$$

Раскрываем модули: $v_И - v_К = \pm\frac{\ell}{2}$, $v_К - v_М = \pm\frac{\ell}{3}$.

3. Разность скоростей Ирины и Марины. Она равна сумме двух разностей: $v_И - v_М = (v_И - v_К) + (v_К - v_М)$. Знаки двух слагаемых могут быть одинаковыми или разными, и это даёт два случая (рис. 1).

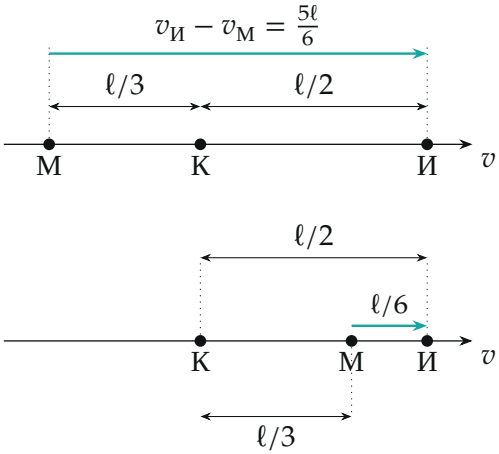


Рис. 1. Скорости бегуний на числовой оси (К взята за ноль). Сверху: Марина медленнее Карины, Ирина быстрее — разность скоростей Ирины и Марины $\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{3}$. Снизу: и Ирина, и Марина быстрее Карины — разность $\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}$

Случай 1: разности одного знака (Карина между Ириной и Мариной по скорости, например $v_И > v_К > v_М$):

$$|v_И - v_М| = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{3} = \frac{5\ell}{6} \quad \Rightarrow \quad T_{ИМ} = \frac{\ell}{5\ell/6} = \frac{6}{5}\text{ мин} = 1{,}2\text{ мин}.$$

Случай 2: разности разных знаков (Ирина и Марина обе быстрее

Карины или обе медленнее):

$$|v_{\text{И}} - v_{\text{М}}| = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3} = \frac{\ell}{6} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{ИМ}} = \frac{\ell}{\ell/6} = 6 \text{ мин.}$$

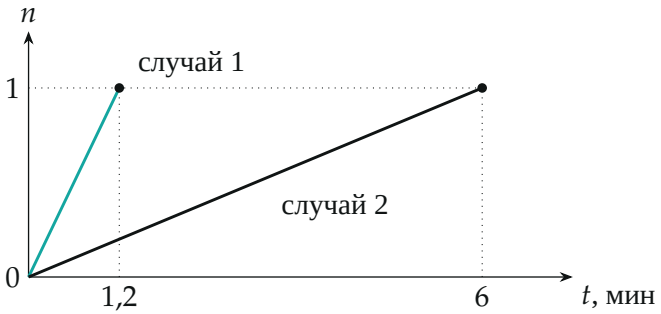


Рис. 2. Сколько кругов n одна бегунья отыграла у другой (Ирина у Марины) за время t: встреча — каждый раз, когда n становится целым; случай 1 — за 1,2 мин, случай 2 — за 6 мин

4. Проверка возможности случаев. Оба случая осуществимы. Пусть $\ell = 60$ м. Случай 1: $v_{\text{М}} = 10$, $v_{\text{К}} = 30$, $v_{\text{И}} = 60$ м/мин; тогда $v_{\text{И}} - v_{\text{К}} = 30 = \ell/2$ и $v_{\text{К}} - v_{\text{М}} = 20 = \ell/3$ — условие выполнено, $v_{\text{И}} - v_{\text{М}} = 50$ м/мин, встреча через $60/50 = 1{,}2$ мин. Случай 2: $v_{\text{К}} = 10$, $v_{\text{И}} = 40$, $v_{\text{М}} = 30$ м/мин: $40 - 10 = 30 = \ell/2$, $30 - 10 = 20 = \ell/3$, а $v_{\text{И}} - v_{\text{М}} = 10$ м/мин, встреча через 6 мин.

Обратите внимание.

- Ответ не единственный: условие не говорит, кто быстрее. Это не ошибка, а часть решения: нужно указать оба времени.
- Складывать надо не «времена встреч» (2 + 3), а разности скоростей, то есть величины, обратные временам.

Проверка. Размерность: м/(м/мин) = мин. Смысл: когда Карина «посередине» по скорости, Ирина и Марина расходятся быстро и встречаются часто (1,2 мин); когда Карина с краю, разность скоростей Ирины и Марины маленькая, и встречаются они редко (6 мин).

Ответ. Ирина и Марина встречаются каждые 1,2 минуты или каждые 6 минут (зависит от того, кто из бегуний быстрее; оба случая возможны).