Гантель на нити

Задача 2. [МОШ 2011/12, 8 класс, задача 2] Гантель состоит из двух шаров одинакового радиуса массами 3 кг и 1 кг. Шары закреплены на концах однородного стержня массой 1 кг так, что расстояние между их центрами равно 1 м. На каком расстоянии от центра шара массой 3 кг нужно закрепить нить на стержне, чтобы гантель, подвешенная за эту нить, висела горизонтально?

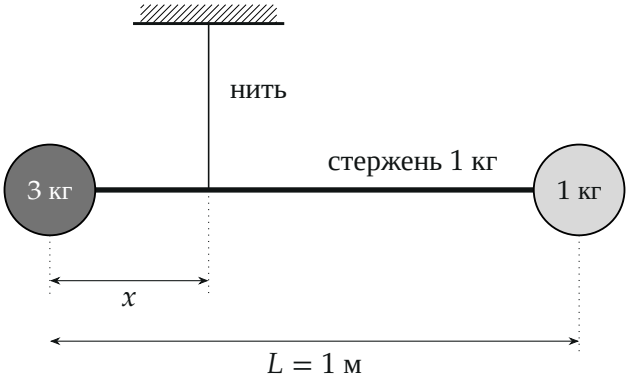


Рис. 1. Гантель на нити: нить прикреплена к стержню на расстоянии x от центра тяжёлого шара

▲ **Решение. Что происходит.** Гантель висит неподвижно и горизонтально, значит, она находится в равновесии: сумма сил на неё равна нулю и сумма моментов относительно любой точки тоже равна нулю. Нить действует на гантель с силой T вверх, а сила тяжести каждой из трёх частей приложена в её центре: у шаров — в центрах шаров, у однородного стержня — в его середине. Нужное расстояние x находим из условия равенства моментов относительно точки подвеса.

Обозначения. $m = 1$ кг — масса лёгкого шара и стержня, $3m$ — масса тяжёлого шара, $L = 1$ м — расстояние между центрами шаров. Ось x направим вдоль стержня от центра тяжёлого шара к лёгкому; x — координата точки подвеса. Радиус шаров не нужен: сила тяжести шара приложена в его центре.

1. Силы. На гантель действуют (рис. 2): сила тяжести тяжёлого шара $3mg$ в точке 0; сила тяжести стержня mg в его середине $L/2$ (шары одинакового радиуса, поэтому середина стержня совпадает с серединой отрезка между центрами); сила тяжести лёгкого шара mg в точке L; сила натяжения нити T вверх в точке x. Условие равновесия сил: $T = 3mg + mg + mg = 5mg$; для нашего вопроса оно не нужно, но показывает, что нить выдержит.

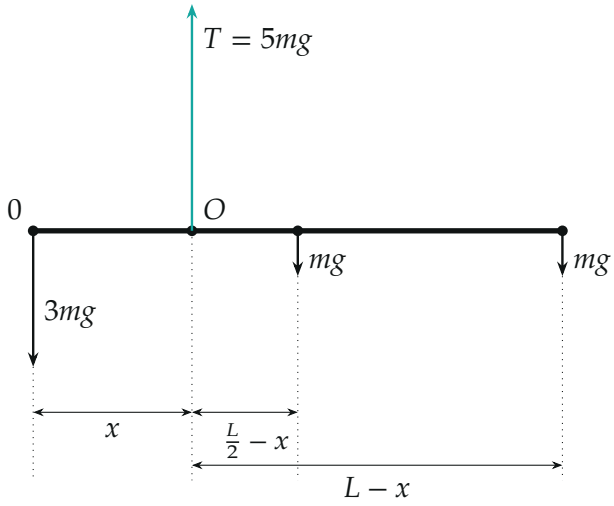


Рис. 2. Силы на гантель и плечи относительно точки подвеса O: тяжёлый шар тянет вниз слева от O, стержень и лёгкий шар — справа

2. Моменты относительно точки подвеса O. Гантель не поворачивается, поэтому момент сил, поворачивающих её против часовой стрелки, равен моменту сил, поворачивающих по часовой (правило моментов, $M = Fd$, d — плечо). Тяжёлый шар слева от O на расстоянии x стремится повернуть гантель против часовой стрелки. Стержень и лёгкий шар справа от O на расстояниях $L/2 - x$ и $L - x$ стремятся повернуть её по часовой стрелке. Сила T приложена в самой точке O, её плечо равно нулю.

3. Уравнение.

$$3mg\,x = mg\left(\frac{L}{2} - x\right) + mg\,(L - x).$$

Сокращаем mg и собираем слагаемые с x:

$$3x = \frac{3L}{2} - 2x \quad \Rightarrow \quad 5x = \frac{3L}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}3L = 0{,}3\text{ м} = 30\text{ см}.$$

Точка подвеса лежит на стержне ($0 < x < L$), левее его середины: тяжёлый шар перевешивает.

4. Второй способ: центр масс. Гантель висит горизонтально, только если нить закреплена в центре масс (там линия действия равнодействующей сил тяжести пересекает стержень). Координата центра масс по оси x:

$$x_{\text{ц.м.}} = \frac{3m \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2} + m \cdot L}{3m + m + m} = \frac{1{,}5L}{5} = 0{,}3L,$$

тот же результат (рис. 3).

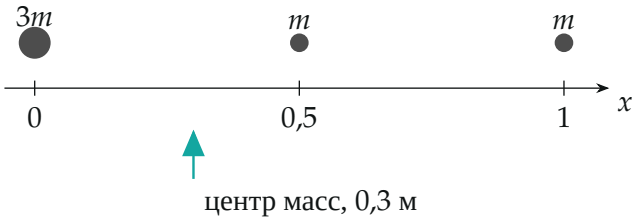


Рис. 3. Три массы на оси: центр масс (точка подвеса) лежит ближе к тяжёлому шару

Обратите внимание.

- Стержень нельзя «не учитывать»: его вес mg приложен в середине, и без него получилось бы $3x = L - x$, $x = 25$ см.

Проверка. Размерность: $x \sim L$, длина. Если бы стержень был невесомым, ответ был бы 25 см (две массы $3m$ и m на концах, $x = L/4$), а вес стержня слегка сдвигает центр масс к середине: 30 см. Если бы массы шаров были равны (m и m), получилось бы $x = L/2$ — середина. Проверка равенства моментов числами: $3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$; $1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}9$ (кг·м). Смысл: нить должна быть там, где гантель «уравновешена по весу» в обе стороны.

Ответ. $x = 30$ см.