Груз на пружине в воде

Задача 3. [МОШ 2011/12, 8 класс, задача 3] Школьница Алиса подвешивала к пружине гири известной массы и изучала зависимость удлинения пружины x от массы m подвешенных к ней гирь. Свои результаты Алиса представила на графике (см. рисунок). Затем Алиса провела опыт с грузом неизвестной массы и плотности. Погрузив груз в сосуд с водой, Алиса увидела, что прикрепленная к грузу пружина растянулась на 3 см, при этом груз не соприкасался с поверхностью воды или дном сосуда. Этот же груз, находящийся в воздухе, растягивал пружину на 4 см. Определите массу груза в граммах и объем груза в миллилитрах. Плотность воды 1000 кг/м^3.

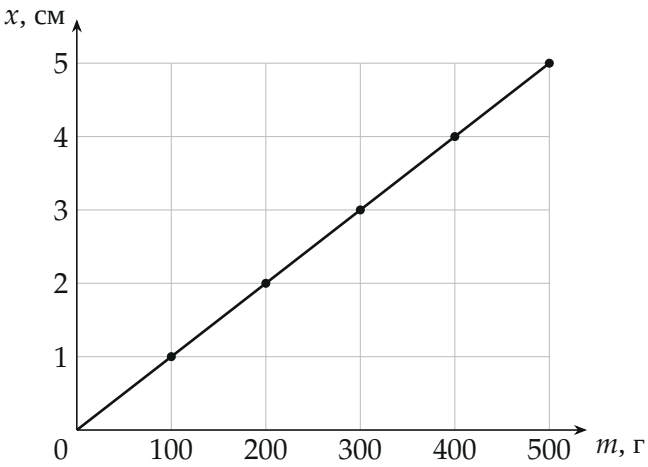


Рисунок к условию: удлинение пружины x в зависимости от массы гири m

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пружина подчиняется закону Гука: сила упругости пропорциональна удлинению. График — прямая, проходящая через начало координат, он это подтверждает и служит «шкалой» пружины: по удлинению видно, вес какой гири её так растягивает. Груз в воздухе и груз в воде растягивают пружину по-разному, потому что в воде на него действует ещё и сила Архимеда, направленная вверх. Разность двух показаний шкалы даёт силу Архимеда, а по ней находится объём груза.

Обозначения. m — масса груза, V — объём груза, $x_1 = 4$ см — удлинение пружины с грузом в воздухе, $x_2 = 3$ см — в воде, F_1, F_2 — силы упругости пружины в этих случаях, F_A — сила Архимеда, $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, $g = 10$ Н/кг.

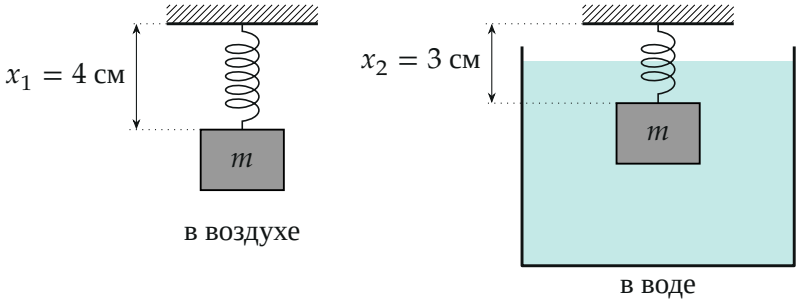


Рис. 1. Опыты Алисы: слева груз в воздухе (пружина растянута на 4 см), справа тот же груз целиком в воде (на 3 см); во втором случае груз не касается ни дна, ни поверхности

1. Шкала пружины. По графику 100 г вызывают 1 см, 200 г — 2 см и так далее: прямая $x = m_\text{г} \cdot \dfrac{1\text{ см}}{100\text{ г}}$. Значит, удлинение 4 см создаёт гиря массой 400 г, а удлинение 3 см — гиря массой 300 г. Сила упругости равна весу этой гири: $F = m_\text{г} g$. Жёсткость пружины

$$k = \frac{0{,}1\text{ кг} \cdot 10\text{ Н/кг}}{0{,}01\text{ м}} = 100\text{ Н/м},$$

$$F_1 = kx_1 = 100 \cdot 0{,}04 = 4\text{ Н}, \qquad F_2 = kx_2 = 3\text{ Н}.$$

2. Масса груза. В воздухе груз висит неподвижно: сила тяжести mg вниз уравновешена силой упругости F_1 вверх (второй закон Ньютона для груза при нулевом ускорении). Воздух давит на груз с силой Архимеда, которую здесь не учитываем: она на три порядка меньше. Тогда $mg = F_1 = 4$ Н, то есть груз растягивает пружину так же, как гиря массой 400 г:

$$m = \frac{F_1}{g} = \frac{4}{10} = 0{,}4\text{ кг} = 400\text{ г}.$$



в воздухе: $F_1 = mg$ в воде: $F_2 + F_A = mg$

Рис. 2. Силы на груз (длины стрелок в масштабе 0,45 см на 1 Н): в воздухе — две силы, в воде — три, сила Архимеда F_A добавляет к силе упругости F_2 недостающую до веса часть

3. Сила Архимеда. В воде груз тоже висит неподвижно, но теперь вверх на него действуют сила упругости F_2 и сила Архимеда F_A (рис. 2). Равенство нулю суммы сил в проекции на вертикальную ось:

$$F_2 + F_A = mg \quad \Rightarrow \quad F_A = mg - F_2 = 4 - 3 = 1 \text{ Н}.$$

Эту же разность можно прочитать прямо по графику (рис. 3): 400 г − 300 г = 100 г, вес такой гири 1 Н.

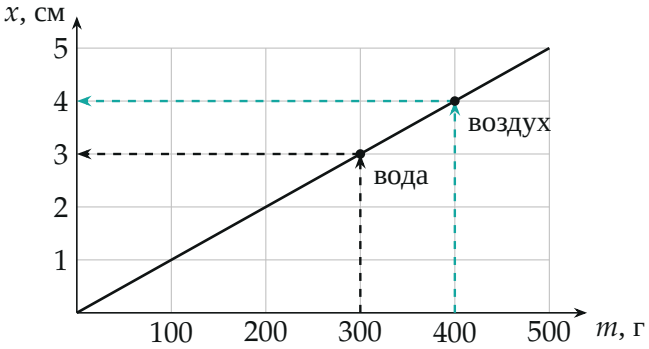


Рис. 3. Чтение графика: 4 см (воздух, бирюзовая линия) соответствует 400 г, 3 см (вода, чёрная линия) — 300 г; разность 100 г

4. Объём груза. Груз погружён в воду целиком, поэтому объём вытесненной воды равен его объёму V (закон Архимеда: $F_A = \rho g V$). Отсюда

$$V = \frac{F_A}{\rho g} = \frac{1}{1000 \cdot 10} = 10^{-4}\ \text{м}^3 = 100\ \text{см}^3 = 100\ \text{мл}.$$

Обратите внимание.

- Пружина показывает именно силу упругости, а не массу: в воде она растянута как под гирей 300 г, хотя масса груза 400 г — «лёгкость» груза в воде объясняется силой Архимеда.

Проверка. Размерность: $\text{Н}/(\text{кг/м}^3 \cdot \text{Н/кг}) = \text{м}^3$. Плотность груза $\rho_\text{г} = m/V = 400\ \text{г}/100\ \text{см}^3 = 4\ \text{г/см}^3$ больше плотности воды, поэтому груз тонет и в воде висит на пружине — согласуется с условием. Второй способ: вес воды, вытесненной грузом, равен $0{,}1\ \text{кг} \cdot 10 = 1\ \text{Н}$, то есть масса вытесненной воды 100 г — это 100 мл при плотности 1 г/мл. Смысл: груз «теряет» в воде 100 г веса, а вытесняет ровно столько воды по массе.

Ответ. Масса груза 400 г, объём 100 мл.