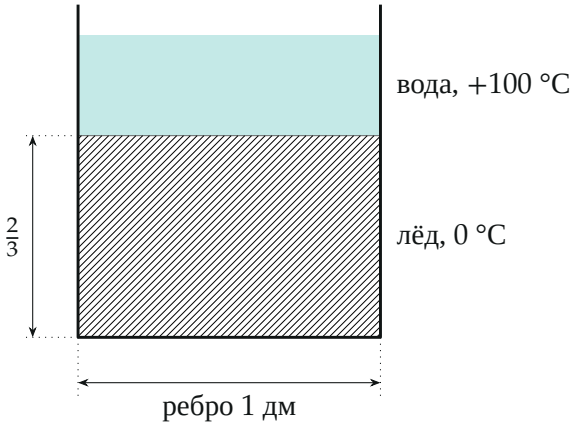
Лёд и кипяток в кубе

Задача 4. [МОШ 2011/12, 8 класс, задача 4] Сосуд в форме куба с ребром 1 дм на 2/3 заполнен льдом, имеющим температуру 0 °C. Туда быстро долили воду, имеющую температуру +100 °C, и сосуд оказался заполненным доверху. Считая, что теплообмен с окружающей средой отсутствует и что лед не всплывает, определите, весь ли лед растает и на сколько опустится уровень воды в сосуде к тому времени, когда система придет в состояние теплового равновесия. Плотности воды и льда 1000 кг/м^3 и 900 кг/м^3 соответственно, удельные теплоемкости воды и льда 4200 Дж/(кг·°C) и 2100 Дж/(кг·°C) соответственно, удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.



Поясняющий рисунок: куб до доливания воды: лёд занимает нижние $\frac{2}{3}$ высоты, долитая вода — верхнюю треть

▲ **Решение. Что происходит.** В кубе смешиваются горячая вода и лёд при 0 °C. Горячая вода остывает и отдаёт тепло, лёд плавится и это тепло забирает. Возможны два исхода: тепла хватит, чтобы растопить весь лёд (тогда всё станет водой при температуре выше 0 °C), или не хватит (тогда в итоге смесь воды и льда при 0 °C). Чтобы выбрать, сравниваем два количества теплоты. Ключевой закон — уравнение теплового баланса: сколько тепла отдала вода, столько получил лёд. Уровень изменится

потому, что вода из растаявшего льда занимает меньший объём, чем сам лёд (плотность воды больше).

Обозначения. $a = 1$ дм — ребро куба, $S = a^2 = 100$ см^2 — площадь дна, $m_л$, $m_в$ — начальные массы льда и горячей воды, $\rho_в = 1000$ кг/м^3, $\rho_л = 900$ кг/м^3, $c = 4200$ Дж/(кг·°C), $\lambda = 335$ кДж/кг, m_x — масса растаявшего льда. Объём куба $V_0 = 1$ дм^3 $= 1000$ см^3.

1. Массы. Лёд занимает $\frac{2}{3}$ объёма: $V_л = \frac{2}{3} \cdot 1000 \approx 667$ см^3, вода занимает остаток $V_в = \frac{1}{3} \cdot 1000 \approx 333$ см^3. Масса равна плотности на объём:

$$m_л = \rho_л V_л = 0{,}9 \text{ г/см}^3 \cdot \tfrac{2000}{3} \text{ см}^3 = 600 \text{ г} = 0{,}6 \text{ кг},$$

$$m_в = \rho_в V_в = \tfrac{1}{3} \text{ кг} \approx 0{,}333 \text{ кг}.$$

2. Сколько тепла может отдать вода. Ниже 0 °C вода остыть не может: пока в сосуде есть лёд, температура смеси не опускается ниже температуры плавления. Остывая от 100 °C до 0 °C, вода отдаёт

$$Q_1 = c\, m_в \cdot (100 - 0) = 4200 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 100 = 1{,}40 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 140 \text{ кДж}.$$

3. Сколько тепла нужно, чтобы растопить весь лёд. Лёд уже имеет температуру плавления, греть его не надо, только плавить:

$$Q_2 = \lambda m_л = 335 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6 = 2{,}01 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 201 \text{ кДж}.$$

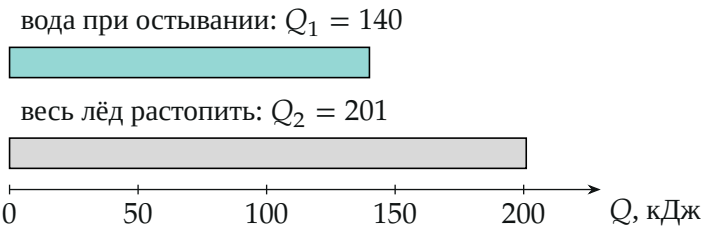


Рис. 1. Сравнение количеств теплоты: воды хватает не на весь лёд

4. Вывод. $Q_1 < Q_2$: даже при остывании воды до 0 °C тепла не хватит на весь лёд. Значит, лёд растает не весь, и в конце смесь воды и льда имеет температуру 0 °C. Всё тепло Q_1 ушло на плавление части льда.

5. Сколько льда растаяло. Уравнение теплового баланса: тепло, отданное остывшей водой, равно теплоте плавления растаявшей части льда:

$$Q_1 = \lambda m_x \quad \Rightarrow \quad m_x = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{1{,}4 \cdot 10^5}{3{,}35 \cdot 10^5} \text{ кг} \approx 0{,}418 \text{ кг} = 418 \text{ г}.$$

Остался лёд массой $m_л - m_x \approx 182$ г (≈ 202 см^3).

6. Изменение объёма. Объём растаявшего льда $m_x/\rho_л \approx 464{,}3$ см^3, а вода из него занимает $m_x/\rho_в \approx 417{,}9$ см^3 (масса при плавлении не меняется). Содержимое куба уменьшилось на

$$\Delta V = \frac{m_x}{\rho_л} - \frac{m_x}{\rho_в} = m_x\left(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}\right) \approx 464{,}3 - 417{,}9 \approx 46{,}4 \text{ см}^3.$$

7. Понижение уровня. Лёд не всплывает и лежит на дне под водой, поэтому всё содержимое, лёд и вода, заполняет куб от дна до уровня воды. Поэтому объём содержимого равен $S \cdot h$ и убыль объёма даёт понижение уровня:

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{46{,}4 \text{ см}^3}{100 \text{ см}^2} \approx 0{,}46 \text{ см} \approx 4{,}6 \text{ мм}.$$

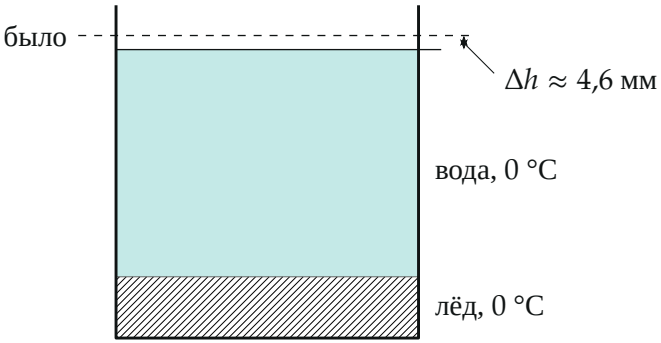


Рис. 2. Итоговое состояние (в масштабе): лёд остался на дне (около 2 см высоты), уровень воды опустился на 4,6 мм относительно прежнего (штриховая линия)

Обратите внимание.

- Теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг·°C) не нужна: лёд уже при 0 °C и не нагревается, он только плавится.
- Уровень опускается, а не поднимается, хотя масса вещества не изменилась: плотность воды больше, чем льда.

Проверка. Размерность: $\text{Дж}/(\text{Дж}/\text{кг}) = \text{кг}$; $\text{см}^3/\text{см}^2 = \text{см}$. Баланс масс: итоговая вода $333{,}3 + 417{,}9 = 751{,}2$ г плюс лёд 182,1 г дают 933,3 г, как $600 + 333{,}3$ г. Баланс объёмов: $751{,}2 + 202{,}3 = 953{,}6$ см^3 $= 1000 - 46{,}4$ см^3. Тепло: $0{,}418 \cdot 335 = 140$ кДж. Смысл: горячей воды (1/3 куба) хватает, чтобы растопить около 70% льда по массе (418 из 600 г), а уровень падает на 4,6% высоты куба.

Ответ. Растает не весь лёд (растает ≈ 418 г из 600 г, останется смесь воды и льда при 0 °C); уровень воды понизится на $\approx 4{,}6$ мм.