U-трубка с маслом и водой

Задача 7. [МОШ 2011/12, 8 класс, 2-й тур, задача 3] В одно колено U-образной трубки залили масло, а в другое – воду. Жидкости разделены посередине поршнем, который находится в равновесии. Масло закрывают массивным поршнем. Какой массой должен обладать этот поршень, чтобы уровни жидкостей выровнялись, если начальный уровень воды над дном трубки 8 см, а плотности воды и масла 1 г/см^3 и 0,8 г/см^3 соответственно? Площадь внутреннего сечения трубки 10 см^2, нижний поршень остается в нижней части трубки.

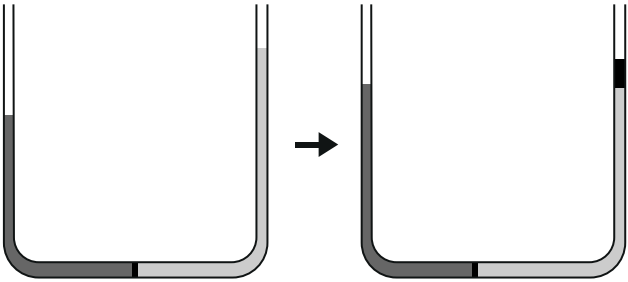


Рисунок к условию: слева — до, справа — после того, как масло закрыли массивным поршнем (тёмная жидкость — вода, светлая — масло)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Нижний поршень свободно скользит вдоль горизонтальной части трубки (его вес направлен поперёк движения и на равновесие не влияет), поэтому давления жидкостей на него с двух сторон одинаковы (условие равновесия поршня: силы давления слева и справа равны, площадь одна). Давление столба жидкости равно ρgh и зависит только от высоты столба, а атмосферное давление действует на обе жидкости одинаково и сокращается. Сначала в равновесии столбы разной высоты, потому что плотности разные. Когда на масло кладут поршень массой m, он добавляет к давлению масла mg/S, столбы выравниваются, и это добавление в точности компенсирует разность давлений столбов равной высоты. Ключевые законы — давление столба жидкости и сохранение объёма несжимаемой жидкости.

Обозначения. $\rho_в = 1$ г/см^3 и $\rho_м = 0{,}8$ г/см^3 — плотности воды и масла, $h_в = 8$ см — начальная высота воды над дном, $h_м$ — начальная высота масла, h — общая высота уровней после выравнивания, $S = 10$ см^2 — площадь сечения, m — масса массивного поршня, g — ускорение свободного падения. Высоты считаем от дна трубки.

1. До поршня. Нижний поршень в равновесии, значит, давления воды и масла на него равны (рис. 1):

$$\rho_в g\, h_в = \rho_м g\, h_м \quad \Rightarrow \quad h_м = \frac{\rho_в}{\rho_м}\, h_в = \frac{1}{0{,}8} \cdot 8 \text{ см} = 10 \text{ см}.$$

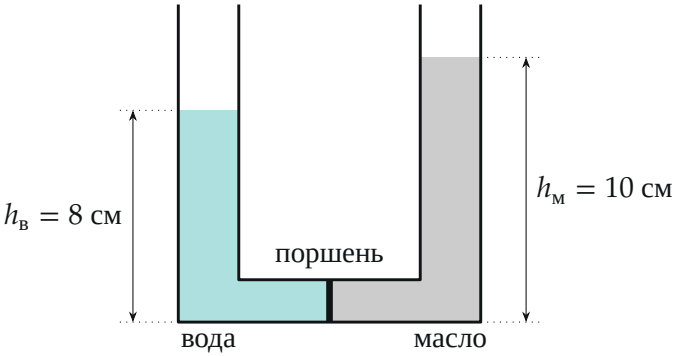


Рис. 1. Начальное равновесие: масло в трубке выше воды, потому что оно легче; $h_м = 10$ см

2. Высота столбов после выравнивания. Жидкости несжимаемы, а нижний поршень остаётся в горизонтальной части трубки, значит, суммарная длина жидкости вдоль трубки, вода плюс масло, не меняется. Эта длина складывается из двух вертикальных столбов и горизонтальной части между стенками (длина последней не меняется): до — $h_в + h_м$, после — $h + h$. Приравниваем:

$$2h = h_в + h_м \quad \Rightarrow \quad h = \frac{8 + 10}{2} \text{ см} = 9 \text{ см}.$$

Вода поднялась на 1 см, масло опустилось на 1 см. Смещение нижнего поршня в условии не задано — оно следует из того же сохранения объ-

ёма: воды в вертикальном колене прибавилось $S \cdot 1$ см, столько же её убыло в горизонтальной части, значит, нижний поршень сдвинулся на 1 см в сторону воды (рис. 2). Это совпадает с рисунком условия.

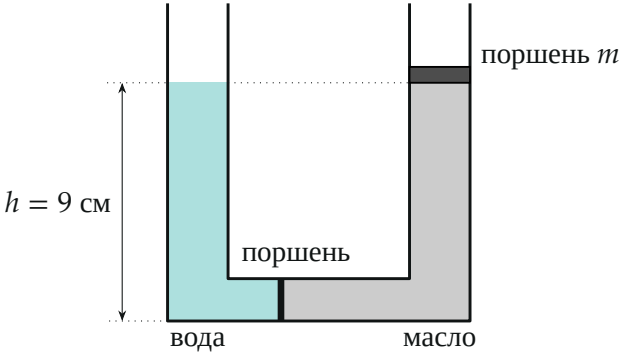


Рис. 2. После выравнивания уровни воды и масла на высоте $h = 9$ см; сверху на масле — массивный поршень m, нижний поршень сместился к воде

3. Равенство давлений на нижний поршень с массивным поршнем. Слева давит столб воды высотой h (плюс атмосфера p_0). Справа — столб масла высотой h, давление массивного поршня mg/S и та же атмосфера p_0 (рис. 3):

$$p_0 + \rho_в g\, h = p_0 + \rho_м g\, h + \frac{mg}{S}.$$

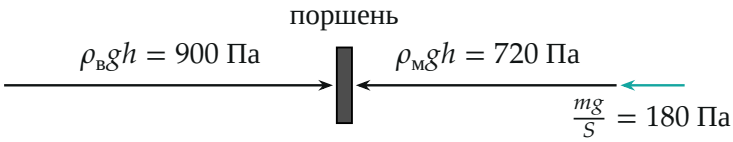


Рис. 3. Давления на нижний поршень после выравнивания: слева давление воды, справа — масла (чёрная стрелка) и массивного поршня (бирюзовая); они равны. Атмосферное давление с обеих сторон одинаково и не показано

4. Масса поршня. Сокращаем p_0 и g:

$$m = (\rho_в - \rho_м)\, h\, S = (1 - 0{,}8)\ \text{г/см}^3 \cdot 9\ \text{см} \cdot 10\ \text{см}^2 = 18\ \text{г}.$$

Обратите внимание.

- Высота столбов после выравнивания — среднее начальных (9 см), а не 8 и не 10: вода поднимается, масло опускается.
- Площадь сечения S нужна только для перевода давления в массу: $mg/S = 180$ Па, при $S = 10$ см$^2 = 10^{-3}$ м^2 это $mg = 0{,}18$ Н.

Проверка. Размерность: (г/см^3) $\cdot$ см $\cdot$ см^2 = г. В паскалях: $\rho_в g h = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}09 = 900$ Па, $\rho_м g h = 800 \cdot 10 \cdot 0{,}09 = 720$ Па, разность 180 Па, $m = 180 \cdot 10^{-3}/10 = 0{,}018$ кг. Предел: при $\rho_м = \rho_в$ жидкости с самого начала стояли бы на одном уровне и $m = 0$. Смысл: поршень компенсирует недостающее давление лёгкого масла, и масса растёт с разностью плотностей.

Ответ. Масса поршня $m = 18$ г.