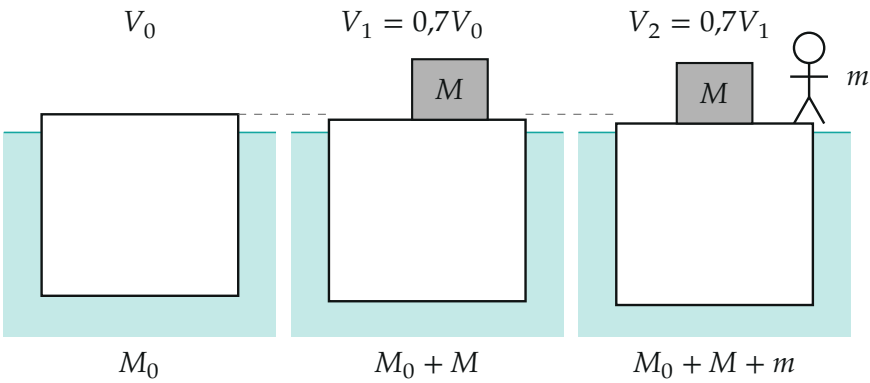
Льдина с грузом и школьником

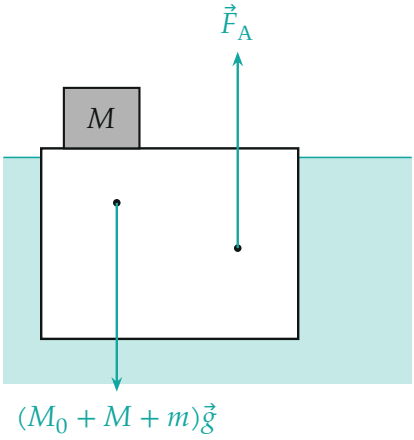
Задача 2. [МОШ 2011/12, 9 класс, задача 2] Когда на льдину поставили груз массой $M = 90$ кг, объём её надводной части уменьшился на 30%. Потом на льдину вышел школьник Антон, и объём надводной части уменьшился ещё на 30%. Найдите массу Антона и массу льдины. Отношение плотностей льда и воды $\rho_л : \rho_в = 0{,}9$.



Три состояния льдины: чистая, с грузом, с грузом и школьником; V — объём надводной части. Пунктир — верх льдины в первом состоянии.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Льдина плавает, значит, сила Архимеда уравновешивает вес всего, что на ней лежит. Чем больше масса на льдине, тем больше погружённый объём и тем меньше надводный. Главная идея: выразить надводный объём через общую массу плавающего и записать два условия «на 30 %».

Обозначения. M_0 — масса льдины, m — масса Антона, V — полный объём льдины, $V_п$ — погружённый объём, $V_н = V - V_п$ — надводный. V_0, V_1, V_2 — надводный объём льдины без груза, с грузом, с грузом и школьником. Из $\rho_л = 0{,}9\rho_в$ имеем $1/\rho_л = 10/(9\rho_в)$.



Силы на систему «льдина + груз + школьник»: сила тяжести всего и сила Архимеда.

1. Условие плавания. Система из льдины и того, что на ней, неподвижна. Запишем условие равновесия: сила Архимеда равна общему весу. Если на льдине лежит масса μ (всё, кроме неё самой), то

$$\rho_в g V_п = (M_0 + \mu)g \quad \Rightarrow \quad V_п = \frac{M_0 + \mu}{\rho_в}.$$

Объём льдины $V = M_0/\rho_л$, поэтому надводный объём

$$V_н = \frac{M_0}{\rho_л} - \frac{M_0 + \mu}{\rho_в} = \frac{M_0}{9\rho_в} - \frac{\mu}{\rho_в}.$$

Формула верна, пока льдина не тонет.

2. Три состояния. Подставим $\mu = 0$, $\mu = M$, $\mu = M + m$:

$$V_0 = \frac{M_0}{9\rho_в}, \qquad V_1 = \frac{M_0}{9\rho_в} - \frac{M}{\rho_в}, \qquad V_2 = \frac{M_0}{9\rho_в} - \frac{M + m}{\rho_в}.$$

3. Масса льдины. Груз уменьшил надводный объём на 30%: $V_1 =$

$0{,}7V_0$. Тогда

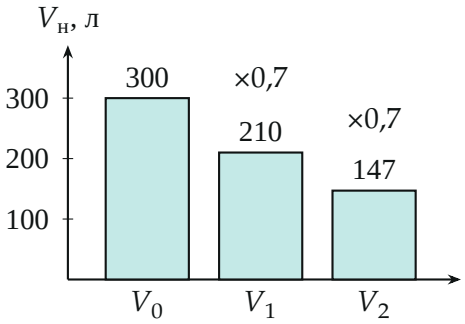
$$\frac{M_0}{9\rho_в} - \frac{M}{\rho_в} = 0{,}7\,\frac{M_0}{9\rho_в} \;\Rightarrow\; 0{,}3\,\frac{M_0}{9} = M,$$

$$M_0 = 30M = 2700 \text{ кг}.$$

4. Масса Антона. Школьник уменьшил надводный объём ещё на 30% — от того, что был перед этим, то есть $V_2 = 0{,}7V_1 = 0{,}49V_0$. Тогда

$$\frac{M_0}{9} - (M + m) = 0{,}49\,\frac{M_0}{9} \;\Rightarrow\; M + m = 0{,}51 \cdot \frac{30M}{9} = 1{,}7M,$$

$$m = 0{,}7M = 63 \text{ кг}.$$



Надводные объёмы при $\rho_в = 1$ кг/л: каждый следующий в 0,7 раза меньше предыдущего.

Обратите внимание: «ещё на 30%» — это 30% от *предыдущего* надводного объёма V_1, а не от начального V_0; иначе получилось бы $V_2 = 0{,}4V_0$ и другой ответ.

Проверка. Размерность: M_0 и m — килограммы. Числа при $\rho_в = 1$ кг/л: $V_0 = 2700/9 = 300$ л, $V_1 = 300 - 90 = 210 = 0{,}7 \cdot 300$, $V_2 = 210 - 63 = 147 = 0{,}7 \cdot 210$. Груз и школьник вытесняют ровно столько воды, сколько весят: 90 л и 63 л — на столько и уменьшился надводный объём.

Ответ. Масса льдины $M_0 = 30M = 2700$ кг; масса Антона $m = 0{,}7M = 63$ кг.