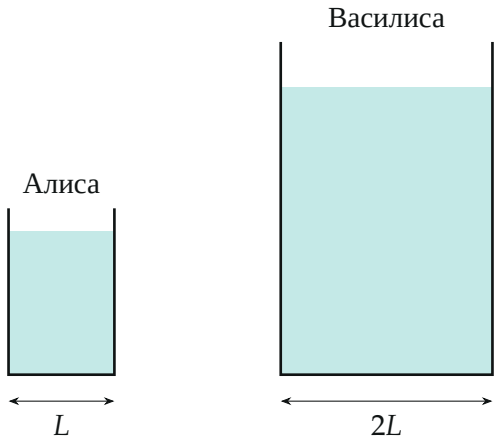
Подобные кипятильники

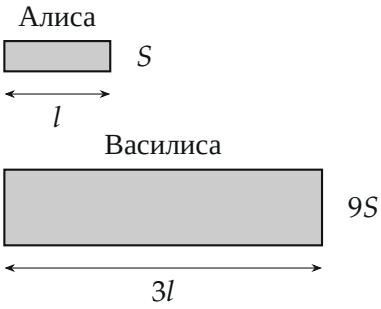
Задача 3. [МОШ 2011/12, 9 класс, задача 3] Школьницы Алиса и Василиса нагревают воду в полных стаканах при помощи кипятильников. Кипятильник Василисы является точной копией кипятильника Алисы, увеличенной в три раза, а стакан Василисы — увеличенной в два раза копией стакана Алисы. Кипятильники включают в розетки с одинаковым напряжением. Вода у Алисы закипает за 3 минуты. За какое время закипит вода у Василисы? Считать, что вся выделяющаяся энергия идёт на нагревание воды. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.



Стаканы подобны: все размеры стакана Василисы вдвое больше (кипятильники на рисунке не показаны).

▲ **Решение. Что происходит.** Вся энергия кипятильника идёт на нагрев воды: $P\tau = cm\Delta t$. Значит, время нагрева $\tau = cm\Delta t/P$ определяют масса воды и мощность. Оба раза вода нагревается на одну и ту же величину Δt (от одной начальной температуры до кипения) — иначе сравнивать нечего. Главная идея — подобие: если все размеры увеличить в k раз, длины растут в k, площади — в k^2, объёмы и массы — в k^3.

Обозначения. l, S — длина и площадь сечения провода спирали Алисы, $R_1, P_1, m_1, \tau_1 = 3$ мин; индекс 1 — у Алисы, индекс 2 — у Василисы; U — напряжение розетки, c — удельная теплоёмкость воды.



Провод спирали: длина и площадь сечения растут вместе с кипятильником.

1. Сопротивление спирали. Спирали из одного материала, у проводника $R = \rho l/S$. При увеличении в три раза длина провода $l_2 = 3l$, а площадь сечения $S_2 = 9S$ (площадь растёт как квадрат размера). Тогда

$$R_2 = \frac{\rho \cdot 3l}{9S} = \frac{R_1}{3}.$$

2. Мощность. Спираль подключена к напряжению U, мощность $P = U^2/R$. Напряжения одинаковы, поэтому

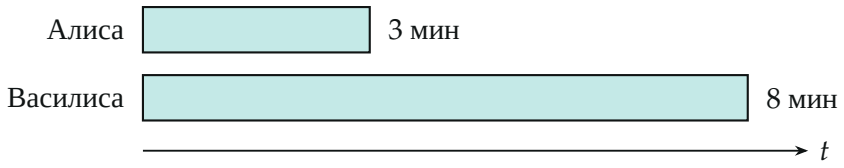
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2} = 3.$$

3. Масса воды. Стакан увеличен в два раза по всем размерам, его объём растёт в $2^3 = 8$ раз. Стаканы полные, вода одна и та же, поэтому

$$\frac{m_2}{m_1} = 8.$$

4. Время. Вся выделившаяся энергия идёт на нагрев воды: $P\tau = cm\Delta t$, откуда $\tau = cm\Delta t/P$. Для обеих школьниц c и Δt одинаковы, поэтому

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{P_1}{P_2} = \frac{8}{3}, \qquad \tau_2 = \frac{8}{3} \cdot 3 \text{ мин} = 8 \text{ мин}.$$



Время закипания в одном масштабе: $8/3$ *от времени Алисы.*

Обратите внимание: сопротивление спирали при увеличении *падает*. Длина провода растёт в 3 раза, но площадь сечения — в 9 раз, и площадь побеждает.

Проверка. Все величины — отношения, размерность не нужна. Общий вид: пусть кипятильник увеличен в k_1 раз, стакан — в k_2 раз. Тогда $R \propto 1/k_1$, $P \propto k_1$, $m \propto k_2^3$ и $\tau \propto k_2^3/k_1$; при $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ получаем $8/3$. Если бы увеличили только кипятильник ($k_2 = 1$), вода закипала бы быстрее ($\tau \propto 1/3$): мощность выросла, а воды столько же — так и должно быть.

Ответ. $\tau_2 = 8$ мин.