Два зеркала под углом

Задача 4. [МОШ 2011/12, 9 класс, задача 4] Два зеркала сложены под углом $7°$. Школьник Станислав направил через маленькое отверстие в одном из зеркал луч лазерной указки перпендикулярно этому зеркалу. Сколько всего отражений испытает луч от этих зеркал?

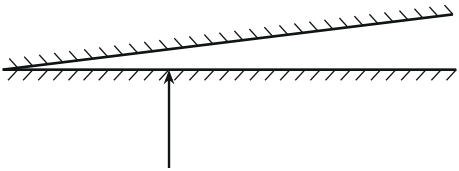


Рисунок условия: луч входит в отверстие нижнего зеркала перпендикулярно ему (угол между зеркалами $7°$, масштаб углов сохранён).

▲ **Решение. Что происходит.** Луч падает на наклонное зеркало, отражается вниз, падает на нижнее, отражается вверх, и так далее. С каждой такой парой отражений он всё сильнее отклоняется от вертикали и всё дальше уходит от вершины угла, пока не пойдёт вдоль клина настолько полого, что перестанет попадать на верхнее зеркало. Нужно посчитать, сколько отражений успеет произойти. Главная идея: следить за направлением луча — закон отражения меняет его на понятную величину, зависящую только от угла между зеркалами.

Обозначения. $\alpha = 7°$ — угол между зеркалами, O — вершина угла. Нижнее зеркало — зеркало 1, наклонное — зеркало 2. Ось x направим вдоль зеркала 1 от вершины, ось y — перпендикулярно ему. Направление луча задаём углом ψ с осью x, против часовой стрелки. В начале $\psi_0 = 90°$: луч идёт вертикально.

1. Закон отражения для зеркала. Если зеркало идёт под углом β к оси x, то отражение переводит направление ψ в $2\beta - \psi$ (угол падения равен углу отражения, оба отсчитываются от нормали). Для зеркала 1 ($\beta = 0$): $\psi \to -\psi$. Для зеркала 2 ($\beta = \alpha$): $\psi \to 2\alpha - \psi$.

2. Одна пара отражений. Пусть луч идёт под углом ψ и сначала попадает на зеркало 2, потом на зеркало 1. После двух отражений

$$\psi \;\to\; 2\alpha - \psi \;\to\; -(2\alpha - \psi) = \psi - 2\alpha.$$

За каждую пару отражений направление луча поворачивается на $2\alpha = 14°$, и угол луча с вертикалью растёт на $14°$. После k пар

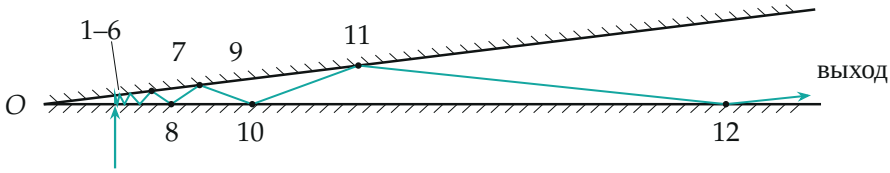
$$\psi_k = 90° - 14°k.$$

3. Когда луч уходит. После отражения от зеркала 1 луч идёт вверх с углом ψ_k к оси x. Он попадёт на зеркало 2 тогда и только тогда, когда он идёт круче этого зеркала: $\psi_k > \alpha = 7°$. Если $\psi_k < 7°$, зеркало 2 уходит вверх быстрее луча, и луч покидает клин. Перебор:

k	0	1	2	3	4	5	6
ψ_k	90°	76°	62°	48°	34°	20°	6°

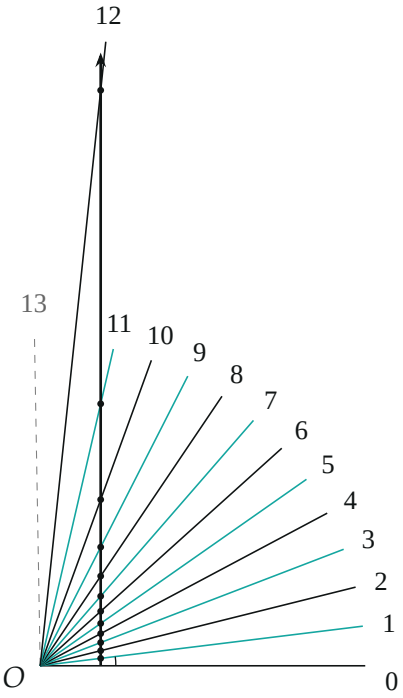
При $k = 0, 1, \ldots, 5$ луч идёт круче $7°$ и снова попадает на зеркало 2, при $k = 6$ — нет: $6° < 7°$.

4. Подсчёт. Пар отражений ровно шесть (k от 0 до 5), в каждой по два отражения: $6 \cdot 2 = 12$. После двенадцатого отражения луч идёт под $6°$ к зеркалу 1 и уходит наружу.



Настоящий ход луча в масштабе (по оси y тоже без растяжения): 12 отражений; нечётные — от зеркала 2, чётные — от зеркала 1. Начало (отражения 1–6) сжато у отверстия.

Второй способ — развёртка. Отражение от зеркала равносильно тому, что луч идёт прямо дальше, а зеркало поменялось своим зеркальным образом. Развернём клин: изображения зеркал — веер лучей из O под углами $0, \alpha, 2\alpha, \ldots$ Луч света — одна вертикальная прямая $x = d$, где d — расстояние от отверстия до вершины. Она пересекает луч веера под углом $j\alpha$, если $j\alpha < 90°$, то есть $j < 90°/7° \approx 12{,}9$: $j = 1, \ldots, 12$. Двенадцать пересечений — двенадцать отражений.



Развёртка: прямая — луч света, веер лучей — изображения зеркал (чёрные — зеркало 1, бирюзовые — зеркало 2). Луч 13 стоит под 91° *и вертикальную прямую уже не пересекает.*

Обратите внимание: не нужно считать, что луч «разворачивается обратно» после какого-то отражения — он просто выходит, как только перестаёт попадать на второе зеркало. Именно поэтому число отражений конечно.

Проверка. Угол падения на j-м отражении равен $7^\circ j$: на двенадцатом $84^\circ < 90^\circ$ (скользящее падение, но падение), на тринадцатом было бы 91°, что невозможно. Числовой расчёт хода луча (по законам отражения, программой) даёт те же 12 точек, шесть на каждом зеркале. Предельный случай: при $\alpha = 45^\circ$ получаем $j < 90^\circ/45^\circ = 2$, то есть одно отражение: луч, отразившись от зеркала 2, идёт параллельно зеркалу 1 и уходит — так и есть.

Ответ. 12 отражений (по 6 от каждого зеркала).