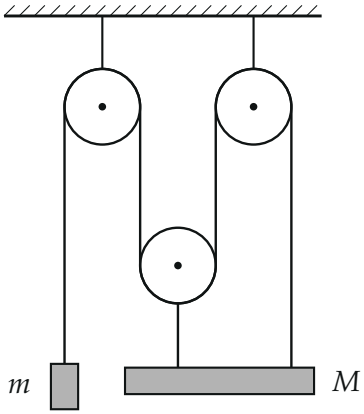
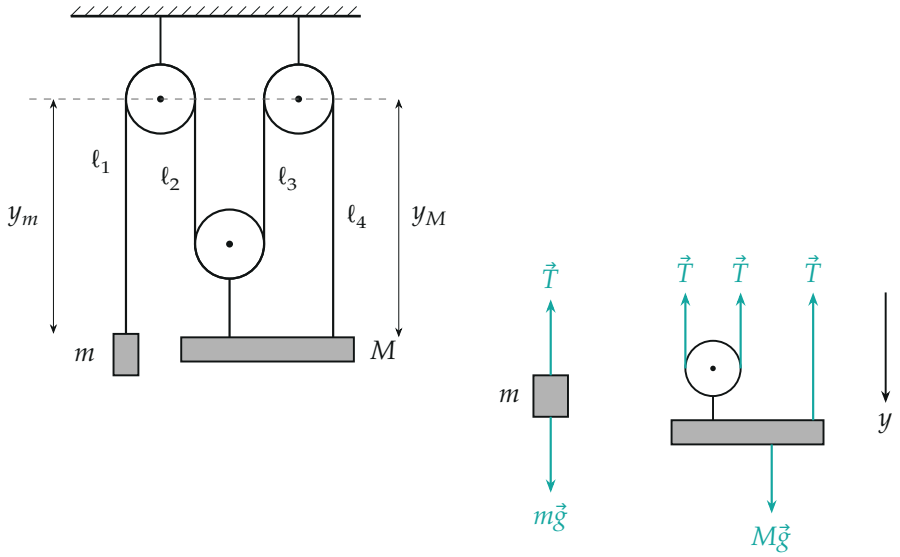
Грузы и блоки

Задача 5. [МОШ 2011/12, 9 класс, задача 5] Изображённая на рисунке система состоит из грузов массами m и M, двух неподвижных и одного подвижного блока. Не лежащие на блоках участки нитей вертикальны. Определите ускорения грузов, считая, что груз массой M при движении сохраняет горизонтальное положение, нити невесомы и нерастяжимы, блоки лёгкие, трения нет.



▲ **Решение. Что происходит.** Нить одна и нерастяжимая, значит, грузы связаны: один вниз — другой вверх, причём перемещения разные из-за подвижного блока. Блоки лёгкие и без трения — натяжение вдоль всей нити одно и то же, T. Главная идея: найти связь ускорений из нерастяжимости нити, потом записать второй закон Ньютона для каждого груза и получить уравнений столько же, сколько неизвестных.

Обозначения. Ось y направим вертикально *вниз* — по ней проектируем всё. a_m и a_M — проекции ускорений грузов на ось y (знак покажет направление), T — натяжение нити. Неизвестные: a_m, a_M, T.



Слева — система с длинами участков нити $\ell_1, \ldots, \ell_4$ и глубинами y_m, y_M от уровня осей неподвижных блоков; справа — силы на груз m и на груз M вместе с лёгким подвижным блоком.

1. Связь перемещений. Измерим глубину y_m груза m и глубину y_M груза M (вместе с подвижным блоком, он жёстко с ним связан) вниз от уровня осей неподвижных блоков. Нить состоит из четырёх вертикальных участков и трёх дуг по блокам. Дуги по неподвижным блокам и под подвижным имеют постоянную длину. Длины вертикальных участков меняются так:

$$\ell_1 = y_m + c_1, \qquad \ell_2 = y_M + c_2, \qquad \ell_3 = y_M + c_3, \qquad \ell_4 = y_M + c_4,$$

где c_i — постоянные. Длина нити не меняется, поэтому сумма постоянна:

$$y_m + 3y_M = \text{const}.$$

Отсюда за любой промежуток времени перемещения связаны: $\Delta y_m = -3\Delta y_M$. Груз m перемещается в три раза больше груза M и в противоположную сторону. Перейдём к скоростям и ускорениям (дважды про-

дифференцируем по времени):

$$a_m = -3a_M.$$

2. Груз m. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и натяжение $\vec{T}$ (вверх). Второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$ma_m = mg - T.$$

3. Груз M вместе с подвижным блоком. Блок лёгкий, и его масса равна нулю. Поэтому сумма сил на него равна нулю, иначе ускорение было бы бесконечным: две ветви нити тянут блок вверх с силой $2T$, значит, стержень тянет блок вниз тоже с силой $2T$, а блок тянет груз M вверх с силой $2T$. Кроме того, груз M тянет вверх нить, привязанная к его правому краю, с силой T. Груз M сохраняет горизонтальное положение, поэтому все силы вертикальны, и второй закон Ньютона:

$$Ma_M = Mg - T - 2T = Mg - 3T.$$

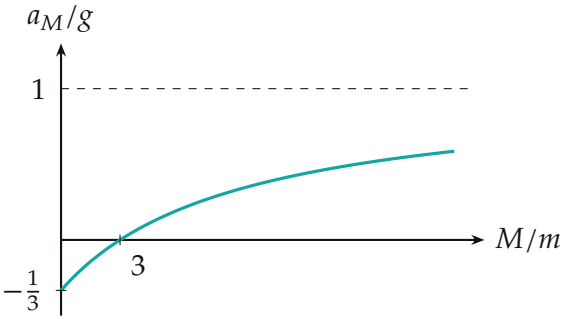
4. Решаем. Из пункта 2 с учётом $a_m = -3a_M$ получаем $T = m(g - a_m) = m(g + 3a_M)$. Подставим в пункт 3:

$$Ma_M = Mg - 3m(g + 3a_M) \;\Rightarrow\; (M + 9m)\,a_M = (M - 3m)\,g.$$

Отсюда ускорения

$$a_M = \frac{(M - 3m)\,g}{M + 9m}, \qquad a_m = -3a_M = -\frac{3(M - 3m)\,g}{M + 9m}.$$

Натяжение нити $T = m(g + 3a_M) = \dfrac{4Mm\,g}{M + 9m}$.



Ускорение груза M (по оси y вниз) в зависимости от отношения M/m: при $M = 3m$ равно нулю, при $M \gg m$ стремится к g.

Знак ответа словами: при $M > 3m$ груз M идёт вниз, груз m — вверх (в три раза быстрее); при $M < 3m$ — наоборот; при $M = 3m$ система в равновесии.

Обратите внимание: сила, с которой блок действует на груз M, равна $2T$, а не T. Именно из-за подвижного блока на груз M действует $3T$ вверх, а связь перемещений 1 : 3.

Проверка. Второй способ — энергия. Работа сил тяжести за малое время идёт на изменение кинетической энергии: $(Mg\,v_M + mg\,v_m) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Mv_M^2}{2} + \dfrac{mv_m^2}{2}\right)$, при $v_m = -3v_M$: $(M-3m)g\,v_M = (M+9m)\,v_M a_M$ — тот же результат. Предельные случаи: при $m \to 0$ получаем $a_M = g$, свободное падение; при $M = 3m$ получаем $a = 0$ и $T = mg$: равновесие, $Mg = 3T$.

Ответ. Проекции ускорений на ось, направленную вниз: $a_M = \dfrac{(M-3m)g}{M+9m}$, $a_m = -3a_M = -\dfrac{3(M-3m)g}{M+9m}$.