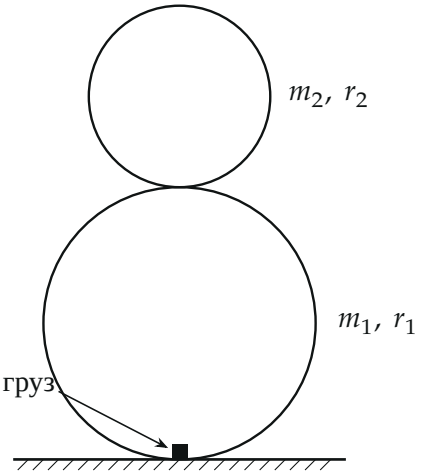
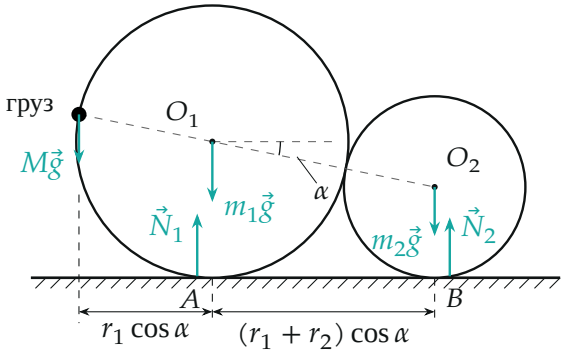
Неваляшка

Задача 6. [МОШ 2011/12, 9 класс, задача 6] Детская игрушка «неваляшка» состоит из двух пластмассовых шаров радиусами $r_1 = 9$ см и $r_2 = 6$ см (см. рисунок), полых внутри. Игрушка стоит на горизонтальном столе. В нижней точке нижнего шара закреплён маленький груз массой $M = 250$ г. «Неваляшка» обладает следующим свойством: если её положить набок, так, чтобы оба шара касались стола, и отпустить, то она «встанет» и вновь примет вертикальное положение. При каких массах m_1 и m_2 нижнего и верхнего шаров соответственно игрушка обладает этим свойством? Считать, что центры масс шаров совпадают с их геометрическими центрами.



▲ **Решение. Что происходит.** Положенная набок игрушка опирается на стол двумя шарами. Она встанет, если такое положение не может быть равновесным: шар 2 оторвётся от стола, игрушка покатится по большому шару и успокоится в вертикальном положении, и это положение устойчиво. Оба условия сводятся к одному: центр масс всей игрушки должен лежать *ниже центра большого шара*. Главная идея — проверить, может ли стол давить на шар 2 (сила реакции стола не бывает отрицательной).

Обозначения. O_1, O_2 — центры шаров, A, B — точки касания шаров со столом в положении «набок», α — угол наклона линии O_1O_2 к столу, N_1 и N_2 — силы реакции стола на шары в точках A и B. Груз находится на линии центров по другую сторону от O_1, чем O_2, на расстоянии r_1 от O_1. Ось x — вдоль стола от A к B, начало в A.



Игрушка лежит на боку: центры шаров на высотах r_1 и r_2, груз — на линии центров. Для x-координат важны плечи, отсчитанные от точки A.

1. Положение на боку. В нём оба шара касаются стола, значит центр O_1 на высоте r_1, центр O_2 — на высоте r_2, расстояние между центрами $r_1 + r_2$. Угол наклона:

$$\sin\alpha = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{3}{15} = 0{,}2.$$

Горизонтальные координаты ($x_A = 0$): центр O_1 — 0 (прямо над A), груз — $-r_1\cos\alpha$, центр O_2 — $+(r_1 + r_2)\cos\alpha$.

2. Может ли игрушка лежать? Стол трения вдоль себя не создаёт, все силы вертикальны. Если игрушка неподвижна, момент сил относительно точки A равен нулю. Моменты создают: N_2 (с плечом $AB = (r_1 + r_2)\cos\alpha$, вверх), сила тяжести m_2g (то же плечо, вниз), сила тяжести груза Mg (плечо $r_1\cos\alpha$, вращает в обратную сторону). Сила N_1 приложена в A, а m_1g — над A: их моменты равны нулю (поэтому m_1 ни на что не влияет). Записываем равенство моментов относительно A:

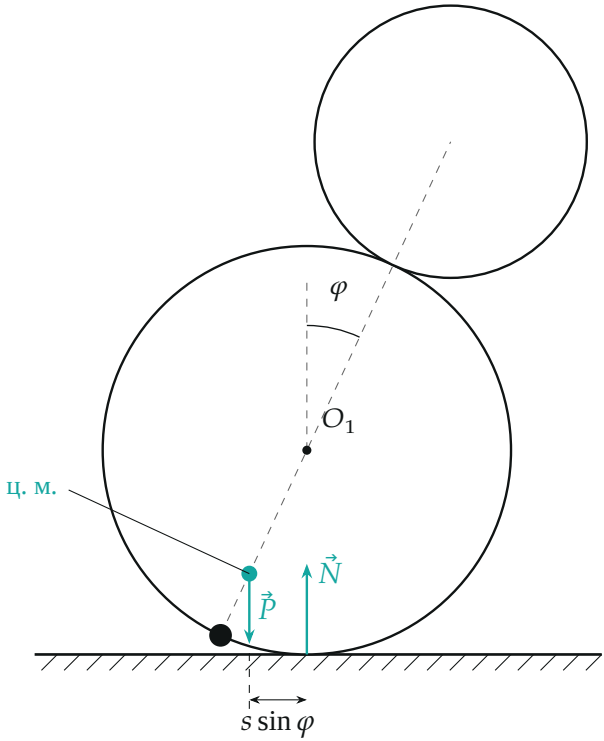
$$N_2(r_1 + r_2)\cos\alpha = m_2g(r_1 + r_2)\cos\alpha - Mg\,r_1\cos\alpha,$$

откуда, сократив на $\cos\alpha$,

$$N_2 = g\,\frac{m_2(r_1+r_2) - Mr_1}{r_1+r_2}.$$

Игрушка лежит неподвижно только при $N_2 \geq 0$. Если $N_2 < 0$, равновесия нет: стол не может тянуть шар вниз, и шар 2 отрывается от стола — груз опускается, игрушка поднимается на большой шар. Требуем $N_2 < 0$:

$$m_2(r_1+r_2) < Mr_1 \quad \Rightarrow \quad m_2 < \frac{Mr_1}{r_1+r_2} = \frac{250\cdot 9}{15}\ \text{г} = 150\ \text{г}.$$



Игрушка стоит на большом шаре, наклонённая на малый угол φ (для примера $m_1 = 50$ г, $m_2 = 20$ г): центр масс ц. м. ниже O_1 на s и сдвинут влево от вертикали (пунктир) через A.

3. Что дальше: встанет ли? После отрыва шара 2 игрушка катится по столу на шаре 1. Если силу тяжести всей игрушки $\vec{P}$ (приложена в центре масс) и реакцию $\vec{N}$ (в точке касания) рассматривать относительно точки A, то при наклоне на малый угол φ плечо силы P равно $s\sin\varphi$, где s — расстояние от O_1 до центра масс, отсчитанное вниз по оси:

$$s = \frac{Mr_1 - m_2(r_1 + r_2)}{m_1 + m_2 + M}.$$

Это то же выражение, что в числителе N_2. При $s > 0$ центр масс ниже O_1, момент силы тяжести возвращает игрушку к вертикали — равновесие устойчиво, игрушка встаёт. При $s < 0$ момент увёл бы её дальше (неустойчиво), при $s = 0$ равновесие безразличное. Условие $s > 0$ совпадает с найденным: $m_2 < Mr_1/(r_1 + r_2)$.

4. Масса нижнего шара. Центр нижнего шара O_1 — над точкой касания A и при лежании на боку, и при качении, поэтому момент силы $m_1 g$ относительно A равен нулю. Масса m_1 входит только в сумму масс в s и не меняет знак s: она может быть любой.

Обратите внимание: угол α в условии не даётся и в ответ не входит — он сократился, потому что плечи груза и шара 2 оба содержат $\cos\alpha$. При $m_2 = 150$ г получается $N_2 = 0$ и $s = 0$ — неваляшка не встанет (безразличное равновесие), поэтому неравенство строгое.

Проверка. Размерность: $Mr_1/(r_1 + r_2)$ — масса. Предельные случаи: при $m_2 \to 0$ верхний шар лёгкий, любое $M > 0$ удерживает центр масс внизу; при $r_2 \to 0$ верхний шар превращается в точку на вершине, предел $m_2 < M \cdot r_1/r_1 = M$ — груз должен перевесить верхнюю массу, как и ожидаем (плечи r_1 и r_1). Второй способ — центр масс относительно O_1 по оси вверх: $\dfrac{m_2(r_1 + r_2) - Mr_1}{m_1 + m_2 + M} < 0$ даёт то же.

Ответ. Масса нижнего шара m_1 — любая; масса верхнего шара $m_2 < \dfrac{Mr_1}{r_1 + r_2} = 150$ г.