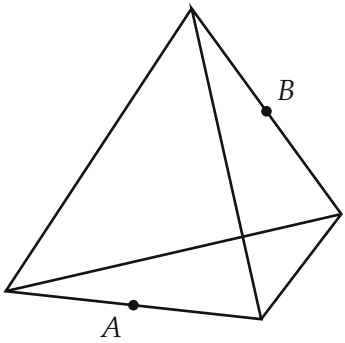
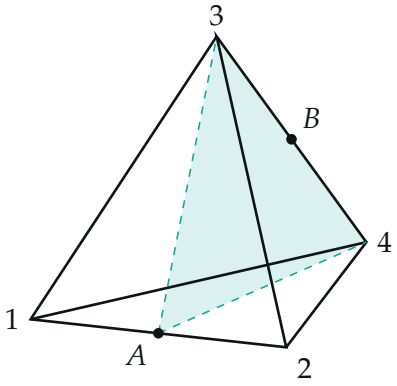
Проволочная пирамида

Задача 8. [МОШ 2011/12, 9 класс, задача 8] Из проволоки сделали правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой имеют одинаковую длину и сопротивление R. К серединам двух противоположных взаимно перпендикулярных рёбер подсоединили выводы A и B омметра — прибора для измерения сопротивлений. Что покажет омметр?



▲ **Решение. Что происходит.** Омметр подаёт напряжение на выводы и измеряет ток, сопротивление равно напряжению, делённому на ток. Схему из шести рёбер сразу не свернуть, но она очень симметрична. Главная идея: из симметрии следует, что некоторые вершины имеют одинаковые потенциалы; такие точки можно мысленно соединить проводом — токи не изменятся — и схема сворачивается последовательными и параллельными соединениями.

Обозначения. Вершины пирамиды $1, 2, 3, 4$ (тетраэдр), A — середина ребра 12, B — середина противоположного ребра 34. Сопротивление ребра R, значит, сопротивление каждой половинки ребра (от середины до вершины) $R/2$ — у проволоки вдвое меньше длина. I — ток, который омметр пропускает через схему, φ_k — потенциал вершины k.

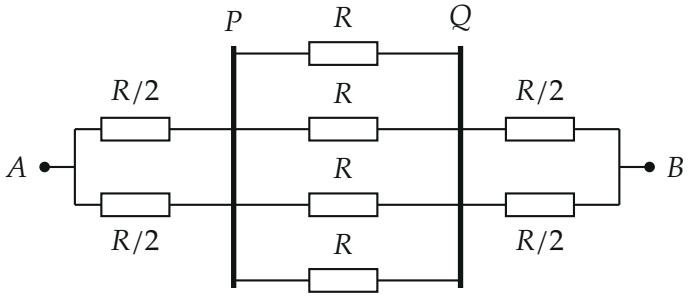


Плоскость симметрии (закрашена) проходит через ребро 34 и точку A: отражение в ней меняет местами вершины 1 и 2 и оставляет на месте 3, 4, A и B.

1. Равные потенциалы. Отражение в плоскости, показанной на рисунке, переводит пирамиду саму в себя: все рёбра одинаковы, вершины 1 и 2 меняются местами, а выводы A и B остаются на месте. Значит, и схема, и источник переходят в себя, и распределение токов и потенциалов тоже. Поэтому $\varphi_1 = \varphi_2$. Тем же рассуждением для плоскости через ребро 12 и точку B: $\varphi_3 = \varphi_4$.

2. Замена на эквивалентную схему. Между вершинами 1 и 2 нет прямого ребра: ребро 12 — это две половинки $R/2$ с выводом A посередине. Раз $\varphi_1 = \varphi_2$, соединим 1 и 2 проводом в один узел P, а 3 и 4 — в узел Q. Токи при этом не изменятся, потому что по такому проводу ток не пошёл бы. Тогда схема состоит из трёх последовательных участков:

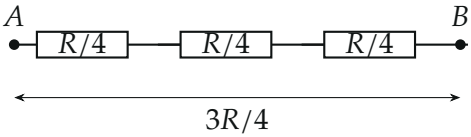
- от A к P: две половинки ребра 12, каждая $R/2$, параллельно: $R_{AP} = \dfrac{R/2}{2} = \dfrac{R}{4}$;
- от P к Q: четыре ребра $13, 14, 23, 24$, каждое R, параллельно: $R_{PQ} = \dfrac{R}{4}$;
- от Q к B: две половинки ребра 34 по $R/2$ параллельно: $R_{QB} = \dfrac{R}{4}$.



Эквивалентная схема (P — вершины 1 и 2, Q — вершины 3 и 4): два R/2 параллельно, четыре R параллельно, два R/2 параллельно — всё последовательно.

3. Последовательное соединение. Три участка включены друг за другом, сопротивления складываются:

$$R_{AB} = R_{AP} + R_{PQ} + R_{QB} = \frac{R}{4} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}.$$



Три участка по R/4 подряд: сопротивление между A и B равно 3R/4.

Обратите внимание: у проволочной пирамиды нет ребра между вершинами 1 и 2, которое можно было бы выбросить: ребро 12 — две половинки с выводом A посередине, и по ним идёт ток $I/2$ каждая. Выбрасывать нельзя ничего, можно только соединять точки равного потенциала.

Проверка. Размерность: сопротивление, Ом. Второй способ — по токам и напряжениям. Пусть через омметр идёт ток I. По симметрии в каждой половинке ребра 12 течёт $I/2$, в каждом из четырёх рёбер 13, 14, 23, 24 — $I/4$, в каждой половинке ребра 34 — $I/2$. Напряжения на участках: $\frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{IR}{4}$, $\frac{I}{4}\cdot R = \frac{IR}{4}$, $\frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{IR}{4}$, полное $U = \frac{3IR}{4}$, откуда $R_{AB} = U/I = 3R/4$. Потенциалы (при $\varphi_B = 0$): $\varphi_A = \frac{3IR}{4}$,

$\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{IR}{2}$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \dfrac{IR}{4}$ — убывают от A к B и равны для симметричных вершин. Прямой численный расчёт токов во всех шести рёбрах (правила Кирхгофа, программой) даёт те же $0{,}75R$.

Ответ. Омметр покажет $3R/4$.