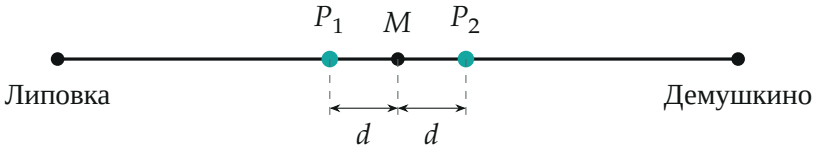
Пешеход и велосипедист в Демушкино

Задача 1. [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 1] Школьники Владислав и Ярослав стартовали из деревни Липовка в деревню Демушкино: Владислав направился пешком, а Ярослав — спустя $t_1 = 8$ мин на велосипеде. Добравшись до Демушкино, каждый из школьников развернулся и продолжил движение обратно с прежней скоростью. Ярослав прибыл обратно в Липовку на $t_2 = 32$ мин раньше Владислава. На дистанции школьники встретились два раза, причём обе встречи произошли на одинаковом расстоянии от середины дистанции. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода? Сколько времени прошло между встречами?



Поясняющий рисунок. M — середина дистанции, P_1 и P_2 — места встреч, расположенные симметрично относительно M.

▲ **Решение. Что происходит.** Велосипедист догоняет пешехода (первая встреча), доезжает до Демушкино, разворачивается и едет навстречу пешеходу, который ещё идёт туда (вторая встреча). Пешеход идёт равномерно, поэтому его координата пропорциональна времени, а симметрия встреч относительно середины даёт простую связь времён встреч. Главная идея задачи — нарисовать графики координат от времени и записать условия пересечений.

Обозначения. v — скорость пешехода, kv — скорость велосипедиста (k нужно найти), S — расстояние от Липовки до Демушкино, $\tau = S/v$ — время, за которое пешеход доходит до Демушкино. Время t считаем от старта пешехода, координату x — от Липовки; t_A и t_B — моменты первой и второй встреч.

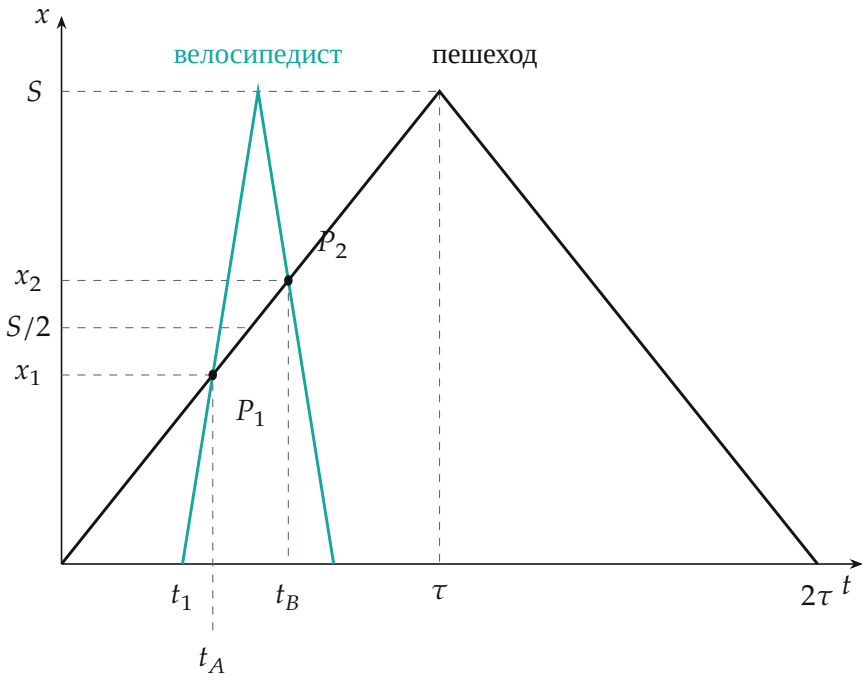


График координат: на рисунке числа соответствуют найденному ниже ответу ($k = 5$, $\tau = 25$ мин).

1. Условие на время возвращения. Пешеход приходит обратно в момент 2τ. Велосипедист стартует в t_1, до Демушкино едет τ/k (путь $S = kv \cdot \tau/k$), обратно столько же, и возвращается в $t_1 + 2\tau/k$. По условию он приходит на t_2 раньше:

$$2\tau - \left(t_1 + \frac{2\tau}{k}\right) = t_2 \quad \Rightarrow \quad \tau\,\frac{2(k-1)}{k} = t_1 + t_2.$$

2. Первая встреча. Велосипедист догоняет пешехода, оба идут в сторону Демушкино. Координата пешехода vt, велосипедиста $kv(t - t_1)$ (он стартовал в t_1). Приравняем их в момент t_A:

$$vt_A = kv(t_A - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{k\,t_1}{k-1}.$$

3. Симметрия встреч. Пешеход к моментам встреч прошёл $x_1 =$

$vt_A = \frac{S}{2} - d$ и $x_2 = vt_B = \frac{S}{2} + d$ (идёт равномерно; оба раза ещё по пути в Демушкино — проверим в конце). Сложим: $v(t_A + t_B) = S$, то есть

$$t_A + t_B = \tau.$$

4. Вторая встреча. Велосипедист уже развернулся: его координата сначала растёт до S, потом убывает, и $x = S - kv(t - t_1 - \frac{\tau}{k}) = 2S - kv(t - t_1)$. Он встречает пешехода в момент t_B, когда обе координаты равны: $vt_B = 2S - kv(t_B - t_1)$. Подставим $S = v\tau$ и $t_B = \tau - t_A$:

$$\tau - t_A = 2\tau - k(\tau - t_A - t_1) \quad \Rightarrow \quad (k+1)\,t_A = (k-1)\,\tau - k\,t_1.$$

Выразим t_A из пункта 2 и подставим:

$$\frac{k(k+1)\,t_1}{k-1} + k\,t_1 = (k-1)\,\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2k^2\,t_1}{(k-1)^2}.$$

5. Скорость. Приравняем два выражения для τ (пункты 1 и 4):

$$\frac{k(t_1+t_2)}{2(k-1)} = \frac{2k^2 t_1}{(k-1)^2} \quad \Rightarrow \quad (t_1+t_2)(k-1) = 4kt_1.$$

Отсюда $k(t_2 - 3t_1) = t_1 + t_2$:

$$k = \frac{t_1+t_2}{t_2-3t_1} = \frac{40}{32-24} = 5.$$

6. Время между встречами. Из пункта 5 $\frac{k}{k-1} = \frac{t_1+t_2}{4t_1}$, поэтому

$$t_A = \frac{k\,t_1}{k-1} = \frac{t_1+t_2}{4} = 10 \text{ мин}, \qquad \tau = \frac{(t_1+t_2)^2}{8t_1} = 25 \text{ мин},$$

$$t_B = \tau - t_A = 15 \text{ мин}, \qquad \Delta t = t_B - t_A = \frac{(t_1+t_2)(t_2-3t_1)}{8t_1} = 5 \text{ мин}.$$

Обратите внимание: мы предположили, что обе встречи происходят до того, как пешеход дошёл до Демушкино. Проверим: $t_B = 15$ мин

$< \tau = 25$ мин, а велосипедист в Демушкино в момент $t_1 + \tau/k = 13$ мин, то есть уже развернулся к моменту t_B — предположение верно.

Проверка. Велосипедист едет до Демушкино $\tau/k = 5$ мин, возвращается в Липовку в $8 + 10 = 18$ мин, пешеход — в 50 мин: разность 32 мин, как в условии. Координаты встреч в единицах v·мин: $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, середина 12,5 — встречи симметричны. Размерность k и Δt: k безразмерно, Δt — время. При $t_2 \to 3t_1$ получаем $k \to \infty$: велосипедист так быстр, что пешеход почти не успел уйти, это согласуется с ограничением $t_2 > 3t_1$.

Смысл: из того, что пешеход движется равномерно, а встречи симметричны относительно середины, получается связь $t_A + t_B = \tau$, и дальше задача сводится к двум линейным уравнениям.

Ответ. Скорость велосипедиста больше в $k = \dfrac{t_1 + t_2}{t_2 - 3t_1} = 5$ раз; между встречами прошло $\Delta t = \dfrac{(t_1 + t_2)(t_2 - 3t_1)}{8t_1} = 5$ мин.