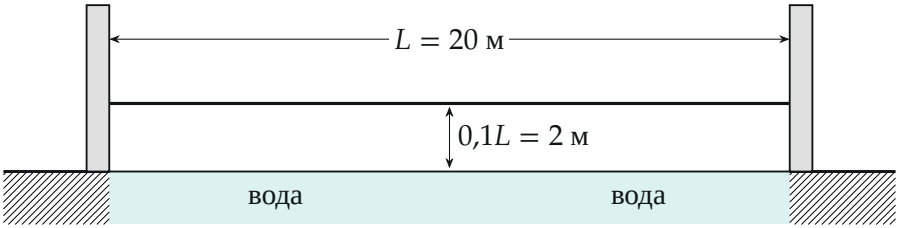
# Груз на верёвке над рекой

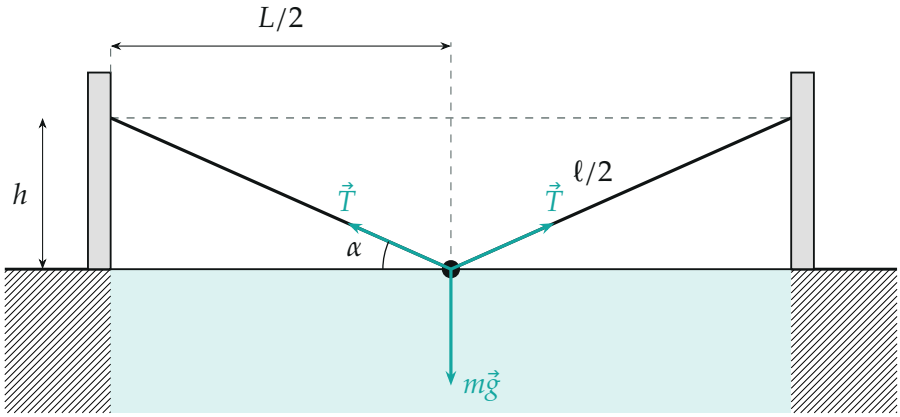
**Задача 2.** [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 2] Проводя опыты с верёвкой, школьник Вася обнаружил, что её удлинение пропорционально растягивающей силе, причём при силе натяжения $F_0 = 4$ кН удлинение составляет 20% от начальной длины. Вася закрепил концы верёвки на стволах двух деревьев, расположенных на расстоянии $L = 20$ м друг от друга на разных берегах реки. Верёвка оказалась на высоте $0{,}1L = 2$ м над водой. Груз какой максимальной массы можно прикрепить к середине верёвки, чтобы он в положении равновесия не оказался в воде? Решите задачу в двух случаях: (а) длина ненатянутой верёвки равна $L$; (б) верёвка вначале натянута с силой $F_0/3$, то есть длина ненатянутой верёвки меньше $L$. Размерами груза можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.




*Условие: верёвка, натянутая между деревьями на двух берегах, на высоте 2 м над водой (масштаб соблюдён).*

▲ **Решение. Что происходит.** Верёвка ведёт себя как очень жёсткая пружина: чем больше удлинение, тем больше сила натяжения (закон Гука). Груз прогибает её; чем глубже прогиб, тем длиннее и сильнее натянута верёвка, тем больше вертикальная составляющая силы, держащей груз. Наибольший груз — тот, при котором середина верёвки как раз опустилась на $h = 0{,}1L = 2$ м и касается воды. Для этого положения нужно найти натяжение и приравнять вес груза сумме вертикальных составляющих двух натяжений.

**Обозначения.** $\ell_0$ — длина ненатянутой верёвки, $\ell$ — длина верёвки с грузом, $T$ — сила натяжения верёвки, $\alpha$ — угол между верёвкой и горизонталью у груза, $h = 0{,}1L$ — провисание в середине. Масса верёвки не учитывается.




*Верёвка с грузом на пределе: середина у самой воды. По вертикали масштаб увеличен, чтобы были видны углы; реальный угол $\alpha \approx 11°$.*

**1. Закон Гука для верёвки.** Удлинение пропорционально силе: $\ell - \ell_0 = \kappa T$. Из опыта: при $T = F_0$ удлинение равно $0{,}2\ell_0$, откуда $\kappa = 0{,}2\ell_0/F_0$. Значит,

$$T = \frac{F_0\,(\ell - \ell_0)}{0{,}2\,\ell_0} = 5F_0\Big(\frac{\ell}{\ell_0} - 1\Big).$$

Формула верна, пока верёвка растянута ($\ell > \ell_0$).

**2. Геометрия в предельном положении.** Концы верёвки неподвижны на расстоянии $L$, середина опустилась на $h$: каждая половина — гипотенуза треугольника с катетами $L/2$ и $h$:

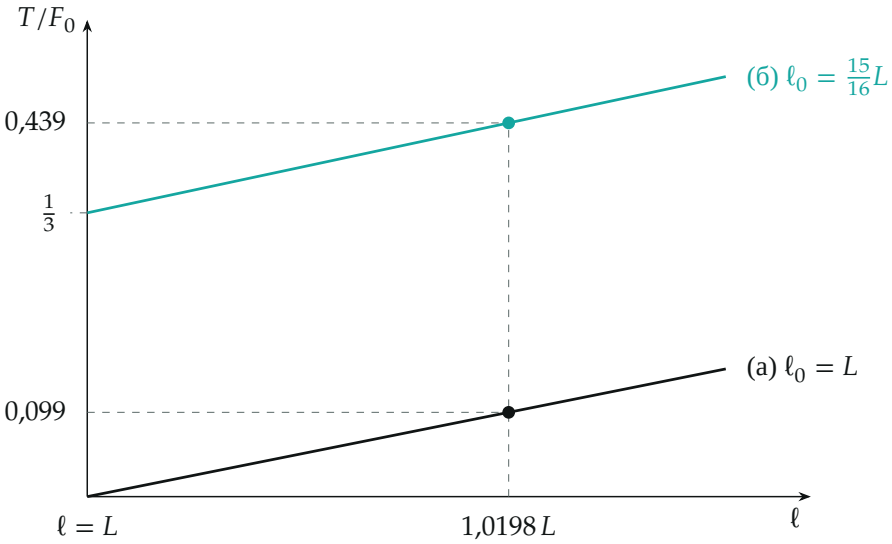
$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{\Big(\frac{L}{2}\Big)^2 + h^2} = \frac{L}{2}\sqrt{1 + \frac{4h^2}{L^2}} = \frac{L}{2}\sqrt{1{,}04} \quad \Rightarrow \quad \ell = 1{,}0198\,L,$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\ell/2} = \frac{0{,}2}{\sqrt{1{,}04}} = 0{,}196.$$

**3. Равновесие груза.** Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на вертикальную ось (ускорение равно нулю). Две силы натяжения одинаковы по симметрии, каждая направлена вдоль своей половины

верёвки, то есть под углом $\alpha$ к горизонту:

$$2T\sin\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2T\sin\alpha}{g}.$$




*Сила натяжения как функция длины верёвки (по закону Гука). Линия (а) выходит из точки $\ell = L$ с нулевой силой, линия (б) — с $F_0/3$; при длине $\ell = 1{,}0198L$ получаем натяжения из пунктов 4 и 5.*

**4. Случай (а): $\ell_0 = L$.** Натяжение

$$T = 5F_0\Big(\frac{\ell}{L} - 1\Big) = 5F_0\,(\sqrt{1{,}04} - 1) = 0{,}099\,F_0,$$

$$m = \frac{2\cdot 0{,}099F_0\cdot 0{,}196}{g} = 0{,}0388\,\frac{F_0}{g},$$

$$m = \frac{0{,}0388\cdot 4000}{10}\ \text{кг} \approx 15{,}5\ \text{кг}.$$

**5. Случай (б): верёвка предварительно натянута.** Когда расстояние между деревьями равно $L$, сила равна $F_0/3$, а удлинение — одна треть

от $0{,}2\ell_0$:

$$L = \ell_0\Big(1 + \frac{0{,}2}{3}\Big) = \frac{16}{15}\,\ell_0 \quad\Rightarrow\quad \ell_0 = \frac{15}{16}\,L = 18{,}75\text{ м}.$$

Удлинение теперь считаем от $\ell_0$, а не от $L$:

$$T = 5F_0\Big(\frac{\ell}{\ell_0} - 1\Big) = 5F_0\Big(\frac{16}{15}\sqrt{1{,}04} - 1\Big) = 0{,}439\,F_0,$$

$$m = \frac{2\cdot 0{,}439F_0\cdot 0{,}196}{g} = 0{,}172\,\frac{F_0}{g},$$

$$m = \frac{0{,}172\cdot 4000}{10}\text{ кг} \approx 68{,}9\text{ кг}.$$

Обратите внимание: в формуле $2T\sin\alpha$ двойка — от двух половин верёвки, каждая держит груз вертикальной составляющей $T\sin\alpha$. В случае (б) верёвка уже растянута, поэтому в законе Гука стоит $\ell/\ell_0$, а не $\ell/L$.

**Проверка.** Размерность: $2T\sin\alpha/g$ — $\text{Н}/(\text{м}/\text{с}^2) = \text{кг}$. Предел: если убрать предварительное натяжение ($F_0/3 \to 0$), то $\ell_0 \to L$ и ответ (б) переходит в (а). Второй способ — малые углы, $\sin\alpha \approx \tan\alpha = 2h/L = 0{,}2$, $\ell \approx L(1 + 2h^2/L^2) = 1{,}02L$: (а) $T = 0{,}1F_0$, $m = 2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2\,F_0/g = 0{,}04\,F_0/g = 16$ кг; (б) $T = 5F_0(\frac{16}{15}\cdot 1{,}02 - 1) = 0{,}44F_0$, $m = 0{,}176\,F_0/g = 70{,}4$ кг. Именно так получен официальный ответ организаторов (16 и 70,4 кг): он приближённый. Точный расчёт (пункты 4–5) даёт 15,5 и 68,9 кг — на 2–3% меньше, потому что приближение малых углов немного завышает и $\sin\alpha$ (0,2 вместо 0,196), и удлинение ($1{,}02L$ вместо $1{,}0198L$).

Смысл: из-за очень малого провисания верёвка почти горизонтальна, и вертикальная сила появляется только благодаря растяжению; поэтому предварительное натяжение (случай б) увеличивает допустимую массу более чем вчетверо.

**Ответ.** (а) $m \approx 15{,}5$ кг (при малых углах 16 кг); (б) $m \approx 68{,}9$ кг (при малых углах 70,4 кг).