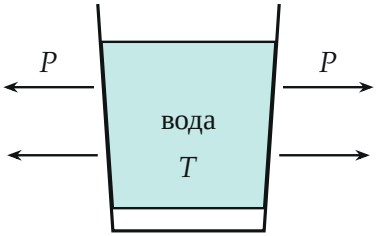
Остывание воды до замерзания

Задача 3. [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 3] Школьник Владислав исследует охлаждение воды в стакане на морозе. Владислав заметил, что охлаждение от температуры 91 °C до 89 °C происходит за 3 минуты, а от температуры 31 °C до 29 °C — за 6 минут. За какое время будет происходить охлаждение от 11 °C до 9 °C? А от +1 °C до −1 °C? Считайте, что мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды. Удельные теплоёмкости воды и льда составляют 4,2 кДж/(кг·°C) и 2,1 кДж/(кг·°C) соответственно, удельная теплота плавления льда 336 кДж/кг. Теплоёмкостью стакана пренебречь.



Поясняющий рисунок. Стакан с водой отдаёт теплоту воздуху мощностью $P = k(T - T_0)$; T — температура воды, T_0 — температура воздуха.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода отдаёт теплоту воздуху с мощностью, пропорциональной разности $T - T_0$. Чем ближе температура воды к температуре воздуха, тем медленнее вода остывает: поэтому те же два градуса вода теряет за 3 минуты при 90 °C и за 6 минут при 30 °C. По этим двум данным найдём температуру воздуха T_0 и характерное время остывания. Дальше остывание идёт по тому же закону до 0 °C, потом вода замерзает при постоянной температуре, пока не отдаст всю теплоту плавления, и только после этого остывает лёд.

Обозначения. m — масса воды, $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°C) и $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·°C) — теплоёмкости воды и льда, $\lambda = 336$ кДж/кг — теплота плавления, k — коэффициент теплоотдачи ($P = k(T - T_0)$), T_0 —

температура окружающей среды, $\tau = cm/k$ — характерное время остывания воды.

1. Закон остывания. Рассмотрим малый промежуток времени dt. За него вода отдаёт теплоту $P\,dt = k(T - T_0)\,dt$, и её температура меняется на $dT < 0$. Закон сохранения энергии для воды (стакан безмассовый):

$$-cm\,dT = k\,(T - T_0)\,dt.$$

Скорость остывания $\left|\dfrac{dT}{dt}\right| = \dfrac{T - T_0}{\tau}$ растёт прямо пропорционально $T - T_0$. Если за время Δt температура изменилась на небольшую величину ΔT (мала по сравнению с $T - T_0$), то в этом промежутке можно взять среднюю температуру $\bar{T}$:

$$\Delta t = \tau\,\frac{\Delta T}{\bar{T} - T_0}.$$

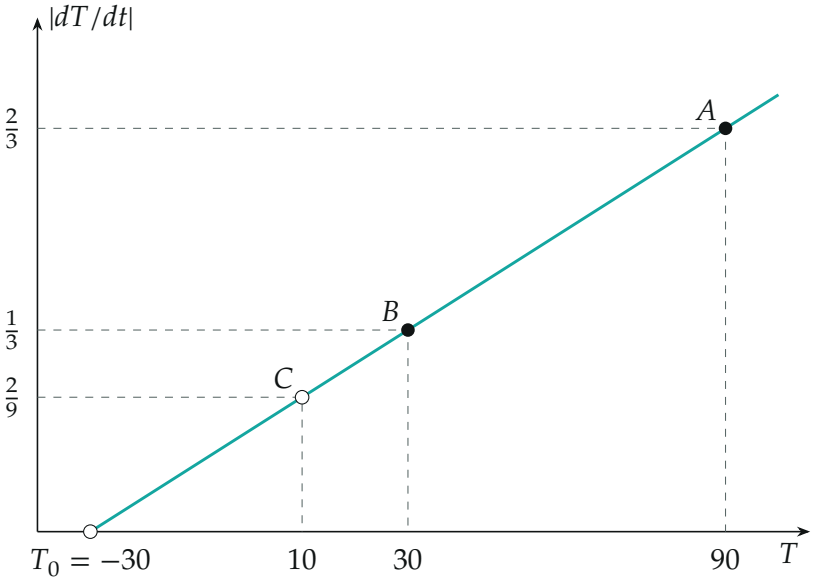
2. Температура воздуха и τ. Для интервала от 91 до 89 °C: $\Delta T = 2$ °C, $\bar{T} = 90$ °C, $\Delta t = 3$ мин; для интервала от 31 до 29 °C: $\bar{T} = 30$ °C, $\Delta t = 6$ мин:

$$3 = \frac{2\tau}{90 - T_0}, \qquad 6 = \frac{2\tau}{30 - T_0}.$$

Разделим второе уравнение на первое: $2 = \dfrac{90 - T_0}{30 - T_0}$, откуда $90 - T_0 = 60 - 2T_0$ и

$$T_0 = -30\,^\circ\text{C}, \qquad \tau = \frac{3 \cdot (90 + 30)}{2} = 180 \text{ мин}.$$

На рисунке то же самое видно как прямая: скорость остывания линейно зависит от T и обращается в ноль при $T = T_0$.



Скорость остывания $|dT/dt|$ в °C/мин как функция T в °C. Точки A и B — данные условия ($2/3$ и $1/3$ °C/мин), прямая через них пересекает ось T в точке $T_0 = -30$ °C. Точка C — первый вопрос.

3. Остывание от 11 **до** 9 °**C.** Здесь $\bar{T} = 10\,^\circ\mathrm{C}$, $\Delta T = 2\,^\circ\mathrm{C}$:

$$\Delta t = \tau \frac{2}{10 - T_0} = 180 \cdot \frac{2}{40}\ \text{мин} = 9\ \text{мин}.$$

4. От $+1$ **до** -1 °**C: три стадии.** Вода не может остыть ниже 0 °C, не замёрзнув, поэтому процесс состоит из трёх частей.

Стадия I: вода от 1 *до* 0 °*C.* $\Delta T = 1\,^\circ\mathrm{C}$, $\bar{T} = 0{,}5\,^\circ\mathrm{C}$:

$$t_1 = \tau \frac{1}{0{,}5 + 30} = \frac{180}{30{,}5}\ \text{мин} \approx 5{,}9\ \text{мин}.$$

Стадия II: замерзание при 0 °*C.* Пока в стакане есть вода, температура не меняется и равна 0 °C. Мощность теплоотдачи постоянна: $P_0 = k\,(0 - T_0) = k \cdot 30\,^\circ\mathrm{C}$. Вся она идёт на кристаллизацию: вода отдаёт теплоту λm:

$$\lambda m = P_0 t_2 = k \cdot 30\,^\circ\mathrm{C} \cdot t_2.$$

Выразим k через τ: $k = cm/\tau$, массы сократятся:

$$t_2 = \frac{\lambda m}{k \cdot 30\,^\circ\mathrm{C}} = \frac{\lambda \tau}{c \cdot 30\,^\circ\mathrm{C}} = \frac{336 \cdot 180}{4{,}2 \cdot 30}\ \text{мин} = 480\ \text{мин} = 8\ \text{ч}.$$

Стадия III: лёд от 0 до $-1\,^\circ C$. Теплоотдача k прежняя, а теплоёмкость льда вдвое меньше: $\tau_л = c_л m/k = \tau\, c_л/c = 90$ мин. $\bar{T} = -0{,}5\,^\circ\mathrm{C}$:

$$t_3 = \tau_л \frac{1}{-0{,}5 + 30} = \frac{90}{29{,}5}\ \text{мин} \approx 3\ \text{мин}.$$

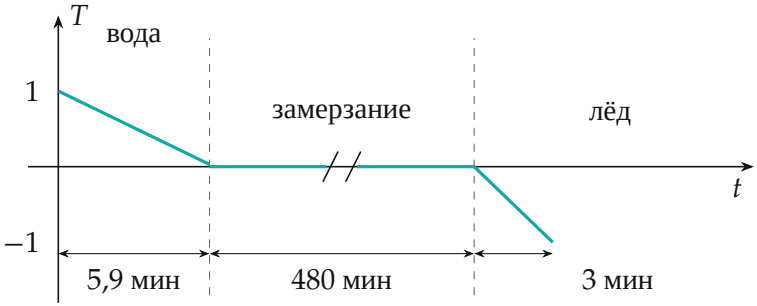


Схема процесса $T(t)$ от $+1$ до $-1\,^\circ C$ (стадия II сильно сжата по времени, обозначена изломом оси).

5. Собираем ответ. Всё время от $+1$ до $-1\,^\circ\mathrm{C}$:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \approx 5{,}9 + 480 + 3{,}0\ \text{мин} \approx 489\ \text{мин} \approx 8{,}1\ \text{ч} \approx 8\ \text{ч}.$$

Обратите внимание: формулу остывания $\Delta t = \tau \Delta T/(\bar{T} - T_0)$ нельзя применять через $0\,^\circ\mathrm{C}$ сразу — на пути стоит замерзание, при котором температура постоянна. А в стадии II время определяет не разность температур, а теплота плавления: в $\lambda/c = 80\,^\circ\mathrm{C}$ заключено столько же энергии, сколько в остывании воды на $80\,^\circ\mathrm{C}$.

Проверка. Размерность: $\tau = cm/k$ — (Дж/(кг·°C)·кг)/(Вт/°C) = с; $t_2 = \lambda\tau/(30c)$ — время. Второй способ — точный интеграл: из $-cm\,dT = k(T - T_0)dt$ получаем $t = \tau \ln\dfrac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}$; при $T_0 = -30\,^\circ\mathrm{C}$

и $\tau = 180$ мин: $180\ln\frac{121}{119} = 3{,}000$ мин, $180\ln\frac{61}{59} = 6{,}000$ мин, $180\ln\frac{41}{39} = 9{,}000$ мин, $180\ln\frac{31}{30} = 5{,}90$ мин, $90\ln\frac{30}{29} = 3{,}05$ мин — совпадает с расчётом по средней температуре (в этих интервалах ΔT в десятки раз меньше $\bar{T} - T_0$).

Смысл: остывание воды от 1 до $-1\,^\circ$C занимает около восьми часов, потому что почти всё время уходит на замерзание: воздух забирает у воды теплоту плавления с небольшой мощностью $k \cdot 30\,^\circ$C.

Ответ. От 11 °C до 9 °C — 9 мин (температура воздуха $T_0 = -30\,^\circ$C, $\tau = 180$ мин); от $+1\,^\circ$C до $-1\,^\circ$C — примерно 489 мин $\approx$ 8 ч (из них $\approx$ 480 мин вода замерзает).