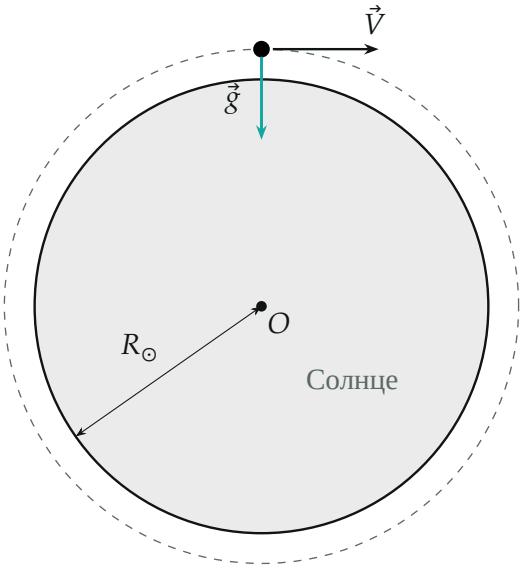
Температура в центре Солнца

Задача 4. [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 4] Оцените температуру в центре Солнца. Считайте, что плотность вещества Солнца постоянна, а в центре Солнца атомы водорода полностью распадаются на протоны и электроны, образуя плазму с молярной массой $\mu = 0{,}5$ г/моль, для которой можно использовать уравнение идеального газа. Первая космическая скорость для Солнца (скорость движения спутника вблизи поверхности Солнца) составляет $V = 400$ км/с. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Примечание. В качестве правильных принимаются ответы вида $T \sim \mu V^2/R$ с любым безразмерным коэффициентом порядка единицы. В частности, если ускорение свободного падения всюду считается равным g, баллы за это не снижаются.

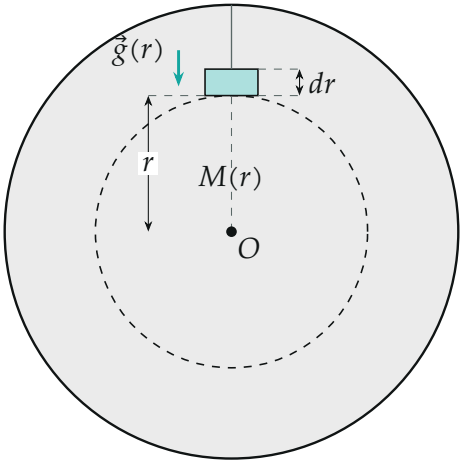


Поясняющий рисунок. Спутник движется по орбите почти у поверхности Солнца со скоростью V; его ускорение направлено к центру O и равно ускорению свободного падения g у поверхности.

▲ **Решение. Что происходит.** Вещество Солнца находится в равновесии: каждый слой не падает к центру, потому что давление газа снизу

больше давления сверху на вес слоя. Значит, давление растёт к центру, и в центре оно равно сумме весов слоёв вещества на пути от поверхности до центра. Зная давление и плотность, из уравнения идеального газа найдём температуру. Главная идея задачи — выразить ускорение свободного падения внутри Солнца через первую космическую скорость.

Обозначения. $R_\odot$ — радиус Солнца, ρ — плотность (одна во всех точках), $M(r)$ — масса вещества внутри сферы радиуса r, $g(r)$ — ускорение свободного падения на расстоянии r от центра, $g = g(R_\odot)$ — у поверхности, $p(r)$ — давление, G — гравитационная постоянная, R — универсальная газовая постоянная.



Тонкий слой толщиной dr на расстоянии r от центра. Внутри пунктирной сферы радиуса r — масса $M(r)$.

1. Давление в центре. Рассмотрим тонкий слой толщиной dr на расстоянии r от центра, площадью S. Его масса $dm = \rho S\,dr$. Слой неподвижен, по второму закону Ньютона сумма сил на него равна нулю. Снизу на него давит сила $p(r)S$ вверх, сверху — $p(r+dr)S$ вниз, вес $dm\,g(r)$ направлен вниз. В проекции на радиальную ось (от центра):

$$p(r)S - p(r+dr)S - \rho S\,dr\,g(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad -dp = \rho\,g(r)\,dr.$$

Просуммируем изменения давления от поверхности (там $p = 0$) до цен-

тра:

$$p_c = \int_0^{R_\odot} \rho\, g(r)\, dr.$$

Это равновесие вещества: Солнце не сжимается и не расширяется.

2. Ускорение свободного падения внутри Солнца. Для шара с одинаковой плотностью притяжение на расстоянии r от центра создаёт только масса внутри сферы радиуса r (внешняя оболочка притяжения не создаёт):

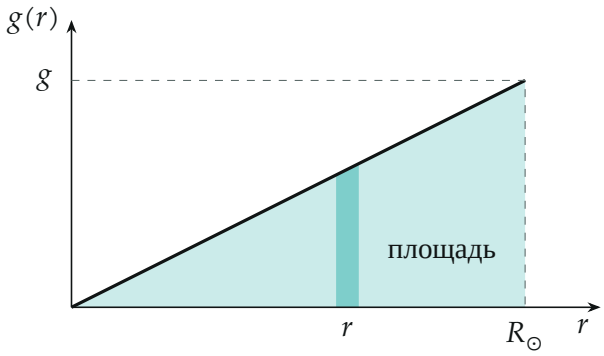
$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi}{3} G\rho\, r.$$

Значит, $g(r)$ пропорционально r. У поверхности $g = \dfrac{4\pi}{3} G\rho R_\odot$, поэтому

$$g(r) = g\,\frac{r}{R_\odot}.$$

3. Связь g с первой космической скоростью. Спутник вблизи поверхности движется по окружности радиуса $R_\odot$ со скоростью V под действием силы тяжести: второй закон Ньютона в проекции на радиус, к центру, $\dfrac{V^2}{R_\odot} = g$, откуда

$$gR_\odot = V^2.$$



Зависимость $g(r) = g\,r/R_\odot$. Площадь под графиком — интеграл $\int g(r)\,dr$; тонкая полоска — вклад слоя dr.

4. Вычисляем давление. Интеграл $\int_0^{R_\odot} g(r)\,dr$ — площадь треугольника под графиком (g — высота, $R_\odot$ — основание):

$$p_c = \rho \int_0^{R_\odot} g\,\frac{r}{R_\odot}\,dr = \rho\,\frac{gR_\odot}{2} = \frac{\rho V^2}{2}.$$

5. Температура. В центре плазма — идеальный газ с молярной массой μ: уравнение Менделеева — Клапейрона для массы m в объёме $\mathcal{V}$ даёт $p\mathcal{V} = \dfrac{m}{\mu}RT$, то есть $p = \dfrac{\rho RT}{\mu}$. Плотность ρ сократится:

$$\frac{\rho RT_c}{\mu} = \frac{\rho V^2}{2} \quad\Rightarrow\quad T_c = \frac{\mu V^2}{2R}.$$

Подставим числа ($\mu = 5\cdot 10^{-4}$ кг/моль, $V = 4\cdot 10^5$ м/с):

$$T_c = \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot\left(4\cdot 10^5\right)^2}{2\cdot 8{,}3}\ \text{К} \approx 4{,}8\cdot 10^6\ \text{К} \approx 5\cdot 10^6\ \text{К}.$$

Обратите внимание: массу Солнца и ρ знать не нужно: ρ сокращается, а g входит только в комбинации $gR_\odot = V^2$. Если по примечанию считать g постоянным по всему радиусу, получится $p_c = \rho g R_\odot$ и T_c вдвое больше — тот же порядок; учёт $g \propto r$ уточняет коэффициент.

Проверка. Размерность: $\mu V^2/R$ — (кг/моль)·(м/с)^2/(Дж/(моль·К)) = К. Второй способ — теорема о вириале. Из пункта 1 $p(r) = \frac{1}{2}\rho V^2(1 - r^2/R_\odot^2)$, температура $T(r) = T_c(1 - r^2/R_\odot^2)$, и её среднее по массе равно $\frac{2}{5}T_c = \mu V^2/(5R)$. Теорема о вириале для однородного шара ($2K + U = 0$, где $U = -\frac{3}{5}GM^2/R_\odot$, $K = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}RT_{\text{ср}}$, $GM/R_\odot = V^2$) даёт то же $T_{\text{ср}} = \mu V^2/(5R) \approx 1{,}9\cdot 10^6$ К. Результат согласован: в центре горячее, чем в среднем.

Смысл: температура в центре определяется только тем, какой скоростью обладает спутник у поверхности: kT частицы плазмы того же порядка, что кинетическая энергия частицы массы μ/N_A при скорости V.

Ответ. $T_c = \dfrac{\mu V^2}{2R} \approx 5\cdot 10^6$ К.