Равновесие заряда в вершине треугольника

Задача 5. [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 5] В трёх вершинах равностороннего треугольника ABC разместили электрические заряды: в вершинах A и B — закреплённые электрические заряды $+q$ и $-q$ соответственно, в вершине C — незакреплённый электрический заряд $+q_1$. Укажите, в какой точке D плоскости ABC надо разместить ещё один электрический заряд $+q$, чтобы находящийся в точке C электрический заряд $+q_1$ находился в равновесии?

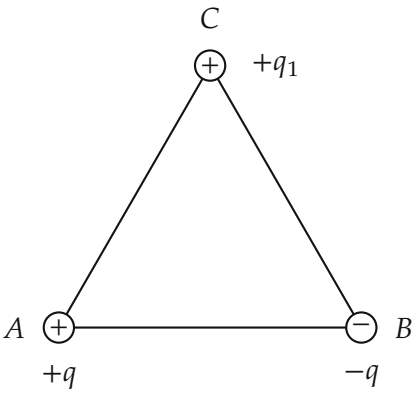


Рис. 1. Поясняющий рисунок к условию: A и B закреплены, C — свободный заряд; сторона треугольника a

▲ **Решение. Что происходит.** Заряд q_1 покоится, если векторная сумма сил, действующих на него со стороны остальных зарядов, равна нулю. Заряды A и B уже создают на q_1 некоторую силу; новый заряд $+q$ должен создать ровно противоположную. Значит, нужно найти эту силу по модулю и направлению, а потом по закону Кулона восстановить, где стоит D: направление даёт прямую, на которой лежит D, модуль — расстояние до него.

Обозначения. a — сторона треугольника; k — постоянная Кулона; $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ — силы на заряд q_1 со стороны зарядов в A и B; $\vec{F}_{AB} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$; $\vec{F}_D$ — сила со стороны нового заряда. Ось x направим вдоль AB от A к B, ось y — перпендикулярно ей, в сторону вершины C.

1. Силы от зарядов в A и B. Закон Кулона: сила взаимодействия двух точечных зарядов направлена вдоль прямой, их соединяющей, а её модуль обратно пропорционален квадрату расстояния. Расстояния $AC = BC = a$, заряды A и B по модулю одинаковы, поэтому модули сил равны:

$$F_A = F_B = F = \frac{k\,q\,q_1}{a^2}.$$

Заряд $+q$ в A одноимённый с q_1 и отталкивает его: $\vec{F}_A$ направлена вдоль AC от A к C и дальше. Заряд $-q$ в B разноимённый и притягивает: $\vec{F}_B$ направлена вдоль CB от C к B (рис. 2).

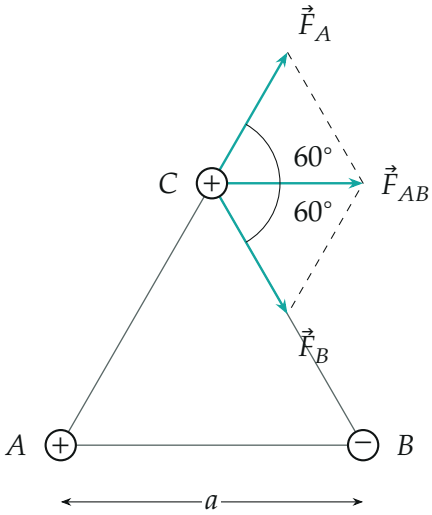


Рис. 2. Силы на заряд q_1 со стороны A (отталкивание) и B (притяжение); их сумма — диагональ ромба, параллельная AB

2. Сумма этих сил. Проекции на оси (углы $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$ с осью x равны $+60°$ и $-60°$, потому что стороны AC и CB наклонены к AB под углом $60°$):

$$F_{AB,x} = F\cos 60° + F\cos 60° = F, \qquad F_{AB,y} = F\sin 60° - F\sin 60° = 0.$$

Сила $\vec{F}_{AB}$ направлена вдоль AB, от A к B, и по модулю равна $F = kqq_1/a^2$

— столько же, сколько каждая из составляющих (диагональ ромба с углом 120° равна его стороне).

3. Что должен создать $+q$ в точке D. Условие равновесия: $\vec{F}_{AB}+\vec{F}_D = 0$, значит $\vec{F}_D$ направлена против оси x (от B к A), а её модуль равен F. Заряд $+q$ одноимённый с q_1, он отталкивает, то есть сила направлена от D к C. Если сила на C смотрит в сторону $-x$, то точка D лежит с другой стороны от C: на прямой, проходящей через C параллельно AB, справа от C (в сторону $+x$). Модуль: $F_D = kqq_1/CD^2 = kqq_1/a^2$, откуда $CD = a$.

4. Положение точки D. Точка D лежит на прямой через C параллельно AB, на расстоянии a от C в сторону от A к B: $\vec{CD} = \vec{AB}$. Тогда четырёхугольник $ACDB$ — параллелограмм (стороны CD и AB параллельны и равны), а $BD = AC = a$ (рис. 3).

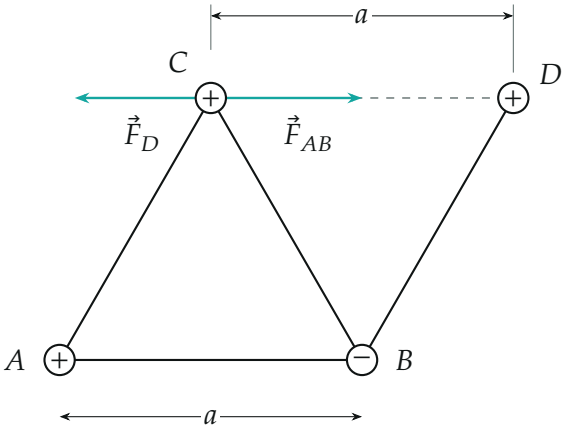


Рис. 3. Заряд $+q$ в точке D создаёт силу $\vec{F}_D$, уравновешивающую $\vec{F}_{AB}$; $ACDB$ — параллелограмм

Обратите внимание. Сила от D получилась направленной против $\vec{F}_{AB}$ именно потому, что заряд в D положительный: он отталкивает q_1 от себя, поэтому ставить его надо с той стороны, *куда* направлена $\vec{F}_{AB}$. С другой стороны от C тот же заряд $+q$ только усилил бы сумму сил.

Проверка. Второй способ — через пару зарядов A и D. Оба $+q$ и оба на расстоянии a от C, поэтому их силы на q_1 равны по модулю F: $\vec{F}_A$ направлена вдоль AC (проекции $(F/2,\ F\sqrt{3}/2)$), $\vec{F}_D$ — в сторону

$-x$ (проекции $(-F,\ 0)$). Сумма $(-F/2,\ F\sqrt{3}/2)$ — сила модулем F, направленная от B к C, то есть ровно противоположная притяжению $\vec{F}_B$ к B. Равновесие выполнено. Размерность: kqq_1/a^2 — сила, расстояние $CD = a$ — длина. Смысл: пара $+q$ в A и D в точке C действует как отталкивание от точки B, а заряд $-q$ в B притягивает к ней с той же силой.

Ответ. Заряд $+q$ надо поместить в вершину D параллелограмма $ACDB$: точка D лежит на прямой через C, параллельной AB, на расстоянии a от C (в сторону от A к B), то есть $\vec{CD} = \vec{AB}$.