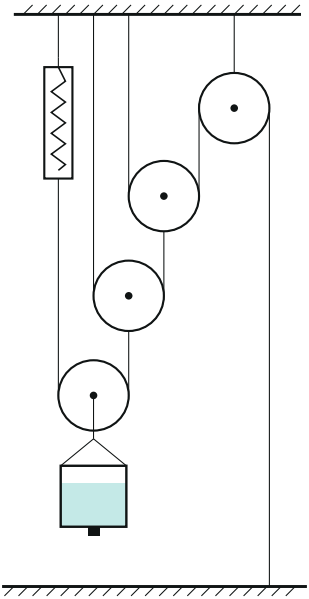
Блоки, динамометр и вытекающая вода

Задача 6. [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 6] На лабораторной работе по физике отличнику Грише и красавице Арише с помощью системы блоков, изображённой на рисунке, требовалось измерить массу воды, налитой в сосуд, который сам был нелёгким. К одной из нитей Гриша прикрепил динамометр, жёсткость пружины которого была известна и равна 1000 Н/м. Гриша налил воды в сосуд и аккуратно измерил удлинение пружины. В этот момент Ариша случайно задела небольшую пробку в дне сосуда и, вооружившись тряпкой, стала ликвидировать растекающуюся по столу воду. Гришу же заинтересовало совсем другое явление — он стал записывать значения удлинения пружины, поглядывая на часы. Используя график, получившийся у ребят, определите, сколько граммов воды в секунду вытекало из сосуда.



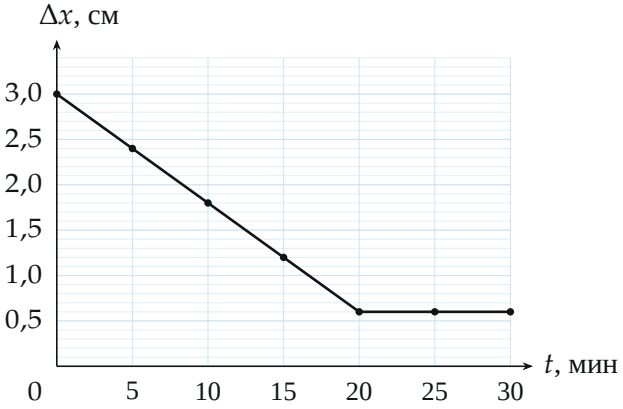


Рис. 1. Схема установки и график зависимости удлинения пружины динамометра от времени (по условию)

▲ **Решение. Что происходит.** Вода вытекает медленно, поэтому в каждый момент система блоков в равновесии. Тогда сила натяжения нити с динамометром всегда равна одной и той же доле веса сосуда с водой. Вес убывает вместе с массой воды, пружина укорачивается, и по графику удлинения можно найти, как быстро убывает масса.

Обозначения. $k = 1000$ Н/м — жёсткость пружины; Δx — её удлинение; T — сила натяжения нити с динамометром (динамометр показывает именно T); m_0 — масса пустого сосуда; m — масса воды; $M = m_0 + m$ — масса сосуда с водой; $P = Mg$ — его вес; $g = 10$ м/с^2. Блоки и нити считаем невесомыми, трение в блоках — отсутствующим.

1. Натяжение нити на подвижном блоке. Нить, одним концом привязанная к динамометру, огибает нижний блок и другим концом идёт вверх к оси следующего блока. Нить невесомая, трения в блоке нет, поэтому сила натяжения вдоль всей этой нити одинакова: T слева от блока и T справа. Сосуд с водой висит на оси нижнего блока и вместе с ним неподвижен; блок невесом, так что для системы «блок + сосуд» второй закон Ньютона в проекции на вертикаль (ось вверх) даёт (рис. 2, 3):

$$2T - P = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{P}{2} = \frac{Mg}{2}.$$

Сила натяжения нити с динамометром в 2 раза меньше веса сосуда с

водой.

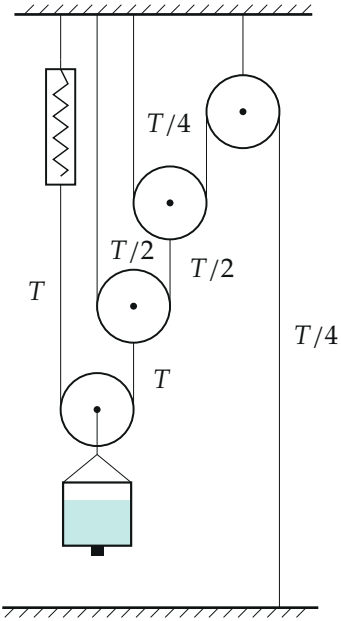


Рис. 2. Силы натяжения нитей в состоянии равновесия: $T = P/2$, на каждой следующей нити вдвое меньше

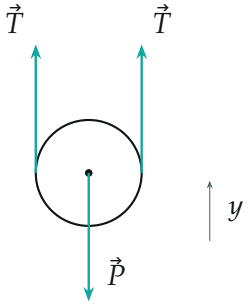


Рис. 3. Силы на нижний блок с сосудом: две нити тянут вверх с силой T каждая, вес $\vec{P}$ — вниз

Остальные блоки на показание динамометра не влияют: правый конец нити нижнего блока привязан к оси второго блока и тянет её вниз

с силой T; две нити второго блока держат её по $T/2$ каждая, две нити третьего — по $T/4$ (рис. 2), и последняя нить, закреплённая на полу, натянута с силой $T/4 = P/8$. Сила T определяется только блоком, на котором висит сосуд.

2. Связь удлинения пружины и массы воды. Пружина динамометра растянута силой T; закон Гука для неё: $T = k\,\Delta x$. Подставим $T = Mg/2$ и $M = m_0 + m$:

$$k\,\Delta x = \frac{(m_0 + m)\,g}{2} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x = \frac{(m_0 + m)\,g}{2k}, \qquad m = \frac{2k}{g}\,\Delta x - m_0.$$

Удлинение — линейная функция массы воды. Это значит, что равномерно уменьшающееся удлинение (прямая на графике) соответствует равномерному вытеканию воды, а изменение массы за время связано с изменением удлинения множителем $2k/g = 200$ кг/м:

$$\Delta m = \frac{2k}{g}\,\Delta(\Delta x).$$

3. Скорость вытекания по графику. Прямая участка от $t_1 = 0$ до $t_2 = 20$ мин проходит через точки (0; 3,0 см) и (20 мин; 0,6 см) (остальные точки — 2,4; 1,8; 1,2 см через каждые 5 мин — лежат на ней: удлинение уменьшается на 0,6 см за 5 мин). Затем удлинение перестаёт меняться и остаётся равным 0,6 см: вода вытекла, остался пустой сосуд. Убыль удлинения и время:

$$|\Delta(\Delta x)| = 3{,}0 - 0{,}6 = 2{,}4 \text{ см} = 2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \qquad \Delta t = 20 \text{ мин} = 1200 \text{ с}.$$

Масса воды, которая вытекла за это время:

$$|\Delta m| = \frac{2k}{g}\,|\Delta(\Delta x)| = 200\ \frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4{,}8 \text{ кг}.$$

Скорость вытекания (число граммов в секунду):

$$\mu = \frac{|\Delta m|}{\Delta t} = \frac{4{,}8 \text{ кг}}{1200 \text{ с}} = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{с}} = 4\ \frac{\text{г}}{\text{с}}.$$

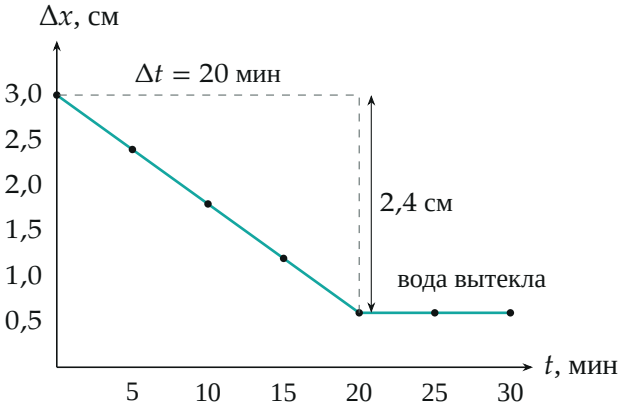


Рис. 4. Участок вытекания воды: за 20 мин удлинение уменьшилось на 2,4 см; после этого остался пустой сосуд

Обратите внимание. Ответ не зависит от числа блоков справа и от массы пустого сосуда m_0: масса воды входит в Δx линейно, а m_0 лишь сдвигает всю прямую вверх. Из графика m_0 тоже находится: после вытекания $\Delta x_{\min} = 0{,}6$ см, откуда $m_0 = 2k\,\Delta x_{\min}/g = 1{,}2$ кг.

Проверка. Размерность: $2k\,\Delta x/g$ — (Н/м)·м/(м/с^2) = кг. Второй способ — по массам: вначале вес сосуда с водой $P_0 = 2T_0 = 2k{\cdot}3{,}0$ см = 60 Н, масса 6 кг; в конце $P = 2k{\cdot}0{,}6$ см = 12 Н, масса 1,2 кг (пустой сосуд); вылилось $6 - 1{,}2 = 4{,}8$ кг — то же. Исходно воды было 4,8 кг, вытекла вся за 20 мин равномерно. Смысл: подвижный блок даёт выигрыш в силе вдвое, поэтому динамометр «чувствует» половину веса, а скорость убыли массы получается простым пересчётом наклона графика.

Ответ. 4 г/с (из сосуда вытекало 4,8 кг воды за 20 мин, равномерно).