# Два шарика на стержне после освобождения

**Задача 7.** [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 7] Два маленьких шарика 1 и 2, масса каждого из которых $m$, соединены невесомым стержнем длиной $L$. Первый шарик шарнирно закреплён в точке $O$, а второй шарик совершает колебания в вертикальной плоскости. В один из моментов, когда стержень был вертикален, верхний шарик освободили из крепления. Когда угол между стержнем и вертикалью оказался равным $\beta > 0$, шарик 2 приблизился к прямой $AB$ на минимальное расстояние. С какой скоростью двигался шарик 2 в момент освобождения шарика 1? Сопротивлением воздуха пренебречь.

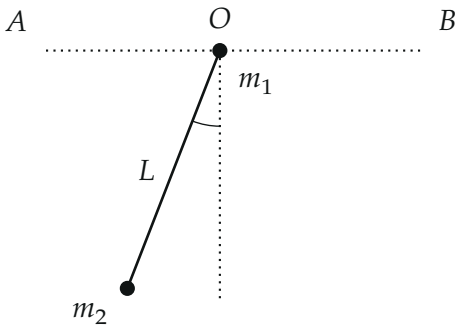



*Рис. 1. Схема из условия: шарик 1 в точке $O$ на прямой $AB$, шарик 2 на стержне длиной $L$*

▲ **Решение. Что происходит.** После освобождения шарика 1 на систему из двух шариков действует только сила тяжести (шарнира больше нет, стержень — внутренняя связь). Поэтому центр масс падает как тело, брошенное горизонтально, а стержень вращается вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью: в системе отсчёта, падающей вместе с центром масс, тяжесть компенсируется и остаётся свободное вращение пары шариков. «Ближайшее к $AB$ положение» шарика 2 — его наивысшая точка, то есть момент, когда вертикальная составляющая скорости шарика 2 обращается в нуль. Из этого условия и найдём $V$.

**Обозначения.** Оси: $x$ — вдоль $AB$, $y$ — вверх, начало в $O$; $t = 0$ — момент освобождения (рис. 2). $V$ — искомая скорость шарика 2 при

$t = 0$; $C$ — центр масс системы; $\vec{v}_C$ — его скорость; $\theta$ — угол стержня с вертикалью в момент $t$ (при $t = 0$ он равен нулю, в искомый момент — $\beta$); $\omega = d\theta/dt$. Шарик 2 при $t = 0$ идёт вправо (для другого направления картина зеркальна).

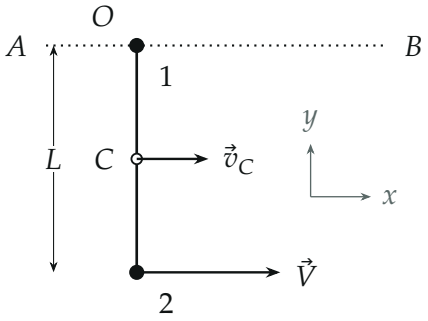



*Рис. 2. Момент освобождения: шарик 1 неподвижен, шарик 2 движется горизонтально со скоростью $V$ (стержень вертикален, скорость перпендикулярна стержню), центр масс — в середине стержня*

**1. Начальные скорости.** Пока шарик 1 был закреплён, его скорость равна нулю. Шарик 2 при вертикальном стержне движется по дуге окружности радиусом $L$ вокруг $O$, значит, его скорость перпендикулярна стержню, то есть горизонтальна и равна $V$. Скорость центра масс при $t = 0$:

$$\vec{v}_C = \frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{2m} = \frac{V}{2}\,\hat{x}.$$

**2. Движение центра масс.** Второй закон Ньютона для системы двух шариков после освобождения: $2m\vec{a}_C = 2m\vec{g}$, внутренние силы (натяжение стержня) сокращаются. Значит, $\vec{a}_C = \vec{g}$, и в проекциях (горизонтальная составляющая импульса сохраняется):

$$v_{Cx} = \frac{V}{2}, \qquad v_{Cy} = -gt.$$

**3. Вращение вокруг центра масс.** Возьмём моменты сил относительно $C$. Шарики находятся на расстоянии $L/2$ от $C$ по разные стороны, их радиус-векторы $\vec{r}$ и $-\vec{r}$; сила тяжести на каждом $m\vec{g}$, суммарный момент

$\vec{r} \times m\vec{g} + (-\vec{r}) \times m\vec{g} = 0$. Натяжение стержня направлено вдоль стержня, то есть вдоль $\vec{r}$, его момент равен нулю. Значит, момент импульса системы относительно $C$ сохраняется. Длина стержня постоянна, поэтому скорость каждого шарика относительно $C$ перпендикулярна стержню, и момент импульса равен $2m \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{\omega L}{2}$; следовательно $\omega = \text{const}$. Начальное значение: относительно $C$ шарик 2 движется со скоростью $V - V/2 = V/2$ перпендикулярно стержню на расстоянии $L/2$:

$$\omega = \frac{V/2}{L/2} = \frac{V}{L}, \qquad \theta = \omega t = \frac{Vt}{L}.$$

Тот же вывод даёт система отсчёта, падающая вместе с центром масс: в ней силы тяжести и инерции на каждый шарик уравновешены, остаётся равномерное вращение по окружности радиусом $L/2$ со скоростью $V/2$ (рис. 3).

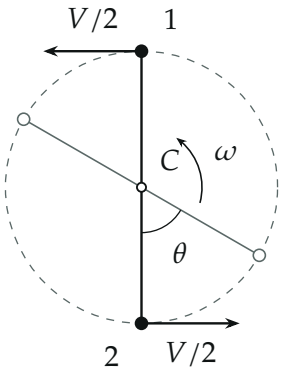



*Рис. 3. Система отсчёта, падающая вместе с центром масс $C$: шарики равномерно идут по окружности радиусом $L/2$ со скоростью $V/2$; серым — положение стержня через время $t$, $\theta = \omega t$*

**4. Скорость шарика 2 в лабораторной системе.** Относительно $C$ шарик 2 находится в точке $\frac{L}{2}(\sin\theta, -\cos\theta)$ и движется со скоростью $\vec{u} = \frac{V}{2}(\cos\theta, \sin\theta)$ — перпендикулярной стержню, по модулю $\omega L/2 = V/2$. Скорость в лабораторной системе — сумма $\vec{v}_2 = \vec{v}_C + \vec{u}$. Её вертикальная проекция:

$$v_{2y} = -gt + \frac{V}{2}\sin\theta.$$

**5. Условие ближайшего положения.** Шарик 2 приближается к $AB$ на минимальное расстояние в наивысшей точке траектории (он ниже $AB$), там вертикальная составляющая скорости равна нулю: $v_{2y} = 0$. Этот момент отвечает $\theta = \beta$, то есть $t = \beta/\omega = \beta L/V$ (рис. 4, 5):

$$-g\,\frac{\beta L}{V} + \frac{V}{2}\sin\beta = 0 \quad\Longrightarrow\quad V^2 = \frac{2gL\beta}{\sin\beta}.$$

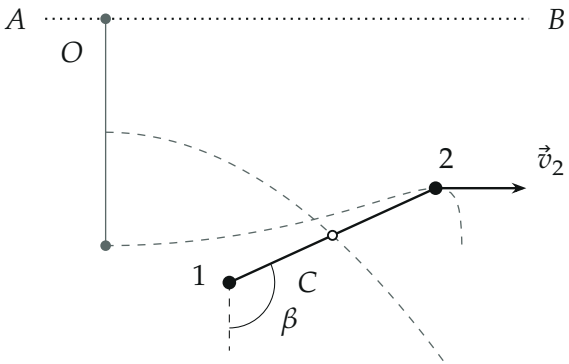



*Рис. 4. Положение системы при $\theta = \beta$ (на рисунке $\beta = 2$ рад): серый стержень — момент освобождения, пунктиры — траектории центра масс и шарика 2; в наивысшей точке $\vec{v}_2$ горизонтальна*

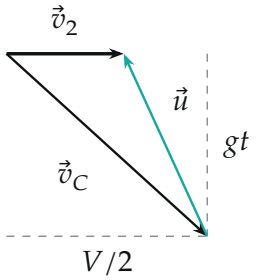



*Рис. 5. Сложение скоростей при $\theta = \beta$: $\vec{v}_C = (V/2, -gt)$, $\vec{u}$ — скорость шарика 2 относительно $C$; вертикальные проекции $\vec{v}_C$ и $\vec{u}$ равны по модулю ($gt = \frac{V}{2}\sin\beta$), сумма $\vec{v}_2$ горизонтальна*

**Обратите внимание.** Угол $\beta$ здесь в радианах: он входит как $\theta = \omega t$, ответ с $\beta$ в градусах не годится. И нельзя считать, что после освобождения шарик 2 продолжает идти по окружности вокруг $O$: точка $O$ больше не неподвижна, шарик 1 падает.

**Проверка.** Размерность: $gL\beta/\sin\beta$ — м$^2$/с$^2$. Предел $\beta \to 0$: $V^2 \to 2gL$. Это ровно то, что даёт прямой расчёт начального ускорения шарика 2: центростремительное ускорение относительно $C$ равно $V^2/(2L)$ и направлено вверх, поэтому $a_{2y} = -g + V^2/(2L)$, и при $V^2 = 2gL$ шарик 2 сначала вертикально не ускоряется — предельный случай, после которого он перестаёт подниматься. Энергия: при $\theta = \beta$ суммарная кинетическая энергия

$$m\left(\frac{V^2}{4} + g^2t^2\right) + \frac{mV^2}{4} = \frac{mV^2}{2} + mg^2t^2,$$

а потенциальная убыла на $2mg \cdot gt^2/2 = mg^2t^2$ — энергия сохраняется. Численный счёт: интегрирование уравнений движения двух шариков со стержнем при $g = 10$ м/с$^2$, $L = 1$ м, $\beta = 1$ рад ($V = 4{,}875$ м/с) даёт наивысшую точку шарика 2 при угле 1,000 рад. Смысл: центр масс «падает», стержень равномерно крутится, и к моменту поворота на $\beta$ вертикальная скорость шарика 2 успевает вырасти и снова упасть до нуля.

**Ответ.** $V = \sqrt{\dfrac{2gL\beta}{\sin\beta}}$ (угол $\beta$ — в радианах); скорость шарика 2 в момент освобождения горизонтальна.