Восемь пластин с диэлектриком

Задача 9. [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 9] Система, изображённая на рисунке, состоит из восьми одинаковых параллельных металлических пластин площадью S. Расстояние между соседними пластинами равно d. Промежутки между некоторыми пластинами заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, и ряд пластин соединён друг с другом проволочными перемычками (см. рисунок). Найдите ёмкость C_{AB} получившейся системы конденсаторов.

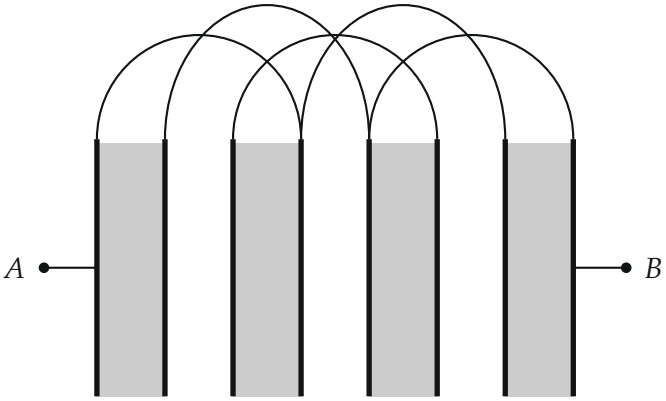


Рис. 1. Схема из условия: серым закрашены промежутки с диэлектриком (ε), дуги — проволочные перемычки

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пластины, соединённые перемычками, имеют один потенциал: перемычки делят восемь пластин на три группы, и конденсаторы образуют только промежутки между пластинами разных групп. Остаётся выписать эти конденсаторы, отметить, какие из них соединены параллельно и какие — последовательно, и сложить ёмкости.

Обозначения. Пластины нумеруем слева направо числами $1, \ldots, 8$. $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ — ёмкость одного промежутка без диэлектрика, $C_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon C_0$ — ёмкость промежутка с диэлектриком (плоский конденсатор; краевыми эффектами пренебрегаем, d много меньше размеров пластин).

Диэлектриком заполнены промежутки 1–2, 3–4, 5–6, 7–8 (серые на рисунке), промежутки 2–3, 4–5, 6–7 — воздух (для него $\varepsilon \approx 1$).

1. Группы пластин. Дуги на рисунке соединяют пары пластин 1–4, 2–5, 3–6, 4–7, 5–8. Пластины, связанные цепочкой перемычек, — один проводник: пластины $1, 4, 7$ образуют группу A (к пластине 1 подключён вывод A), пластины $2, 5, 8$ — группу B (к пластине 8 подключён вывод B), пластины $3, 6$ — группу M, которая ни к какому выводу не присоединена (рис. 2).

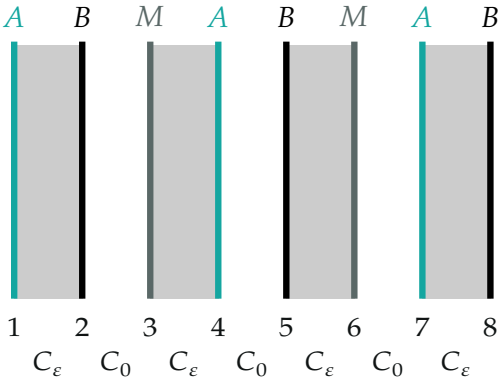


Рис. 2. Три группы пластин одного потенциала: A (пластины 1, 4, 7), B (2, 5, 8), M (3, 6); под промежутками — ёмкости: C_ε у серых, C_0 у пустых

2. Какие конденсаторы получились. Выпишем промежутки и группы пластин по их краям:

промежуток	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8
группы	*A–B*	*B–M*	*M–A*	*A–B*	*B–M*	*M–A*	*A–B*
ёмкость	C_ε	C_0	C_ε	C_0	C_ε	C_0	C_ε

Все конденсаторы между одной парой групп стоят между одними и теми же двумя потенциалами, то есть соединены параллельно (рис. 3).

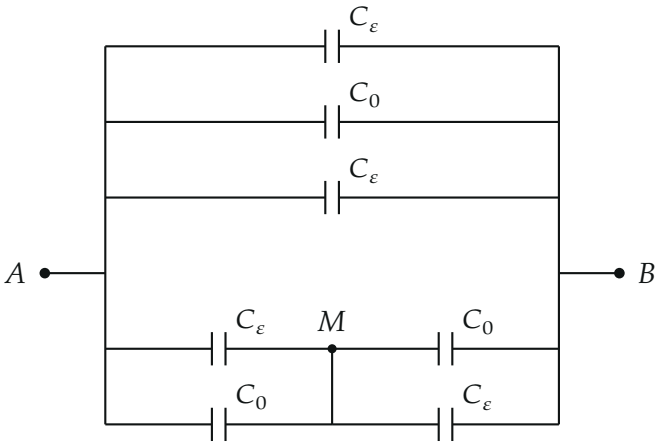


Рис. 3. Эквивалентная схема: между A и B параллельно C_ε, C_0, C_ε; от A к M и от M к B — по паре параллельных конденсаторов, эти две пары соединены последовательно

3. Параллельные соединения. Ёмкости параллельных конденсаторов складываются:

$$C'_{AB} = C_\varepsilon + C_0 + C_\varepsilon = 2C_\varepsilon + C_0, \qquad C_{AM} = C_\varepsilon + C_0, \qquad C_{MB} = C_0 + C_\varepsilon.$$

4. Последовательное соединение через M**.** Группа M изолирована: её суммарный заряд равен нулю и не меняется, поэтому заряды на соседних пластинах конденсаторов C_{AM} и C_{MB} равны по модулю — они соединены последовательно. Для двух одинаковых ёмкостей

$$C_{AMB} = \frac{C_{AM}\,C_{MB}}{C_{AM} + C_{MB}} = \frac{C_\varepsilon + C_0}{2}.$$

5. Вся система. Путь $A \to M \to B$ и три прямых конденсатора A–B подключены к одним и тем же выводам, то есть параллельно:

$$C_{AB} = C'_{AB} + C_{AMB} = 2C_\varepsilon + C_0 + \frac{C_\varepsilon + C_0}{2} = \frac{5C_\varepsilon + 3C_0}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}\,(5\varepsilon + 3).$$

Обратите внимание. Нельзя считать группу M выводом или «выбрасывать» пластины 3 и 6: они не присоединены к источнику, но изменяют

ёмкость — на них наводятся заряды, и именно они дают последовательную ветвь A–M–B.

Проверка. Размерность: $\varepsilon_0 S/d$ — фарады, множитель $(5\varepsilon+3)/2$ безразмерный. Предел без диэлектрика, $\varepsilon = 1$: все семь промежутков одинаковы, $C_{AB} = 4C_0$. Прямой счёт: три параллельных промежутка A–B дают $3C_0$, ветвь A–M–B — две пары по $2C_0$ последовательно, то есть C_0; сумма $4C_0$ — сходится.

Второй способ — через потенциалы. Пусть $\varphi_A = U$, $\varphi_B = 0$. Заряд группы M равен нулю:

$$C_{AM}(\varphi_M - U) + C_{MB}\,\varphi_M = 0 \implies \varphi_M = \frac{U}{2} \quad (C_{AM} = C_{MB}).$$

Заряд, ушедший с вывода A, складывается из трёх прямых конденсаторов и ветви через M:

$$Q = C'_{AB}\,U + C_{AM}\,\frac{U}{2}, \qquad C_{AB} = \frac{Q}{U} = 2C_\varepsilon + C_0 + \frac{C_\varepsilon + C_0}{2},$$

то есть то же самое. Смысл: диэлектрик есть в четырёх промежутках; два из них (1–2 и 7–8) работают на ёмкость целиком, два других (3–4 и 5–6) — через последовательную ветвь, вдвое слабее, поэтому C_ε входит с коэффициентом $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Ответ. $C_{AB} = \dfrac{\varepsilon_0 S\,(5\varepsilon+3)}{2d}$.