Куб с шестью резисторами

Задача 10. [МОШ 2012/13, 10 класс, задача 10] В шесть рёбер куба впаяны одинаковые резисторы с сопротивлениями R, как показано на рисунке. Сопротивления перемычек в остальных рёбрах одинаковы и очень малы. Источник напряжения U подключен к выводам 1 и 3 куба. Найдите токи, текущие через рёбра куба, и общее сопротивление куба.

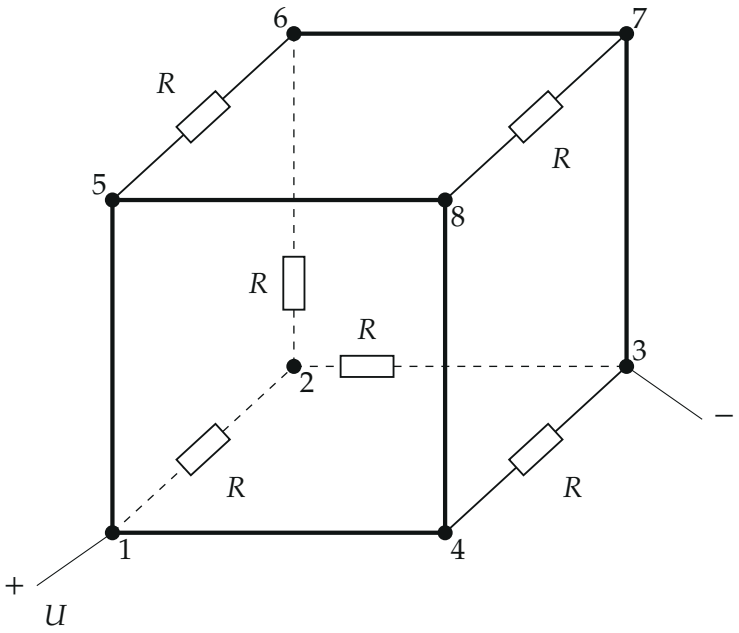


Рисунок условия: резисторы R — в рёбрах 1–2, 2–3, 4–3, 5–6, 6–2 и 8–7; остальные рёбра — перемычки. Пунктир — рёбра, скрытые за гранью.

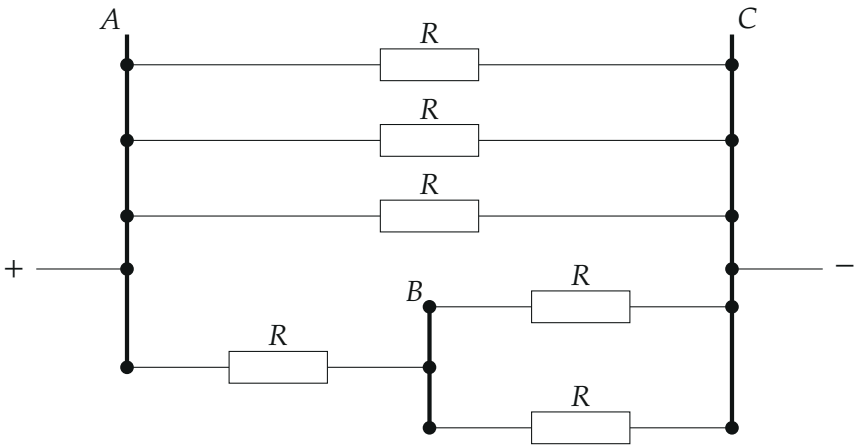
▲ **Решение.** **Что происходит.** Перемычки почти без сопротивления соединяют вершины в группы с одним потенциалом. Склеим каждую группу в один узел — куб превратится в схему из трёх узлов с резисторами между ними. Её сопротивление найдём по правилам параллельного и последовательного соединения, а токи в рёбрах — через напряжение на резисторах и закон сохранения заряда в узлах.

Обозначения. Вершины нумеруем, как на рисунке. A, B, C — узлы схемы (определим ниже), r — малое сопротивление каждой перемычки, I_0 — общий ток, текущий от источника.

1. Склеиваем узлы. Перемычки есть в рёбрах 1–4, 1–5, 4–8, 5–8 (передняя грань), 6–7 и 7–3. Поэтому вершины 1, 4, 5, 8 имеют один потенциал — обозначим узел A (к нему подключён «плюс» источника). Вершины 6, 7 и 3 также одного потенциала — узел C (к нему подключён «минус»). Вершина 2 соединена с остальными только резисторами — узел B.

2. Что соединяет узлы. Каждый резистор стоит между двумя вершинами, а они лежат в разных узлах:

- между A и C — резисторы в рёбрах 5–6, 8–7 и 4–3: три резистора R параллельно;
- между A и B — резистор в ребре 1–2;
- между B и C — резисторы в рёбрах 6–2 и 2–3: два резистора R параллельно.



Эквивалентная схема. Сверху три ветви A–C (рёбра 5–6, 8–7, 4–3), слева внизу — 1–2, справа внизу — 6–2 и 2–3.

3. Общее сопротивление. Три резистора A–C дают $R/3$. Два резистора B–C дают $R/2$, и они стоят последовательно с резистором A–B: ветвь

A–B–C имеет сопротивление $R+R/2=3R/2$. Эта ветвь и три резистора A–C соединены параллельно между A и C:

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}}=\frac{3}{R}+\frac{2}{3R}=\frac{11}{3R}\quad\Rightarrow\quad R_{\text{общ}}=\frac{3R}{11}.$$

Перемычки на сопротивление не влияют: их сопротивление очень мало, $r\ll R$.

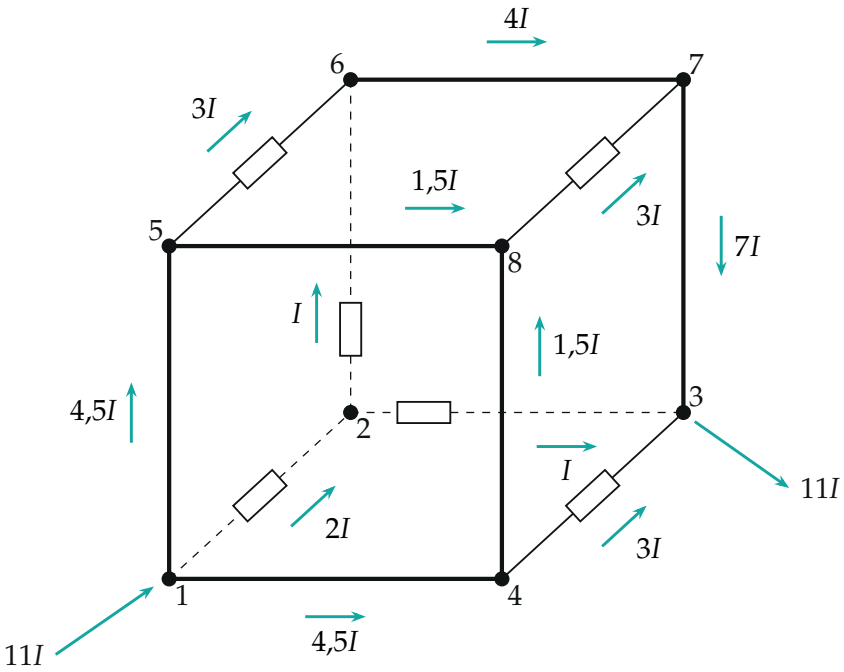
4. Токи через резисторы. Напряжение между A и C равно U. Введём $I=U/(3R)$. Через каждый из трёх резисторов A–C идёт $U/R=3I$. Через ветвь A–B–C сопротивлением $3R/2$ идёт $U/(3R/2)=2I$, значит, через резистор 1–2 — $2I$. В узле B этот ток делится между двумя одинаковыми резисторами 6–2 и 2–3 (на них одно и то же напряжение), поэтому в каждом по I. Общий ток

$$I_0=\frac{U}{R_{\text{общ}}}=\frac{11U}{3R}=11I\quad(=3\cdot 3I+2I).$$

5. Токи через перемычки. Теперь расставим токи по закону сохранения заряда для каждого узла куба (сумма втекающих токов равна сумме вытекающих). В узел 1 втекает $11I$, через резистор 1–2 уходит $2I$, значит, по перемычкам 1–4 и 1–5 уходит $9I$. Токи в резисторах уже известны, поэтому квадрат перемычек 1–4–8–5 можно рассматривать отдельно: в вершину 1 втекает $9I$, из вершин 4, 5 и 8 через резисторы уходит по $3I$. Этот квадрат из четырёх одинаковых перемычек симметричен относительно замены вершин 4 и 5 (вытекающие токи из них одинаковы), поэтому токи в перемычках 1–4 и 1–5 равны — по $4{,}5I$.

Узел 4: втекает $4{,}5I$, через резистор 4–3 уходит $3I$, остаётся $1{,}5I$ — по перемычке 4–8 вверх. Узел 5 устроен так же: по перемычке 5–8 идёт $1{,}5I$. Узел 8: втекает $1{,}5I+1{,}5I=3I$ и вытекает $3I$ через резистор 8–7.

Со стороны узла C: в узел 6 втекают $3I$ (из резистора 5–6) и I (из резистора 2–6), по перемычке 6–7 уходит $4I$. В узел 7 приходят $4I$ и $3I$ (из резистора 8–7), по перемычке 7–3 идёт $7I$. В вершину 3 приходят $7I$, $3I$ (из резистора 4–3) и I (из резистора 2–3): $7I+3I+I=11I$ — весь ток источника.



Токи в рёбрах куба; $I = U/(3R)$. Стрелка показывает направление тока.

Обратите внимание: токи в перемычках не зависят от величины их малого сопротивления r, лишь бы оно было одинаковым: их значения следуют из закона сохранения заряда в узлах и симметрии схемы.

Проверка. Размерность: $3R/11$ — сопротивление; $I = U/(3R)$ — ток. Предельный случай: $R_{\text{общ}} = 3R/11 < R/3$, как и должно быть, потому что к трём параллельным резисторам добавили ещё одну ветвь. Второй способ — по мощности: $\sum I^2R = 3(3I)^2R + (2I)^2R + 2I^2R = 33I^2R$, а источник отдаёт $UI_0 = 3IR \cdot 11I = 33I^2R$ — сходится.

Смысл: перемычки склеивают куб в схему всего из трёх узлов, и вместо двенадцати рёбер остаются три группы резисторов.

Ответ. Общее сопротивление $R_{\text{общ}} = 3R/11$. Токи ($I = U/(3R)$): в рёбрах 4–3, 5–6, 8–7 — по $3I$; в 1–2 — $2I$; в 6–2 и 2–3 — по I; в перемычках: 1–4 и 1–5 — по $4{,}5I$, 4–8 и 5–8 — по $1{,}5I$, 6–7 — $4I$, 7–3 — $7I$; общий ток $11I$.