Лайнеры и катера

Задача 1. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 1]

Круизные лайнеры «Первый» и «Второй» плывут равномерно и прямолинейно. Угол между их курсами равен $\alpha = 60°$, скорость «Первого» $v_1 = 35$ км/ч, скорость «Второго» $v_2 = 31{,}6$ км/ч. С лайнера «Первый» с временным интервалом в несколько часов отплывают два катера, которые, двигаясь с постоянной одинаковой скоростью, перпендикулярной курсу «Первого», точно приплывают ко «Второму». Определите скорость u катера.

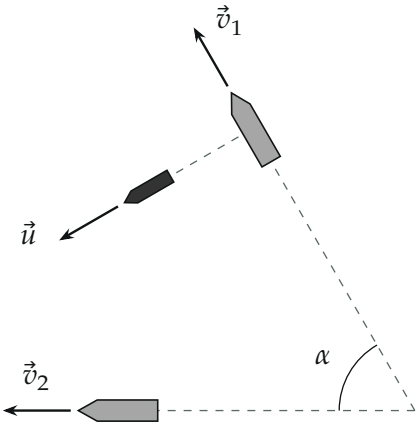


Рис. 1. Рисунок условия: курсы лайнеров пересекаются под углом α, катер идёт перпендикулярно курсу «Первого».

▲ **Решение. Что происходит.** Удобно перейти в систему отсчёта «Первого»: в ней он неподвижен, а оба катера стартуют из одной точки (рис. 2). Скорость катера относительно воды одна и та же у обоих, значит, и относительно «Первого» она одна и та же, и оба катера идут по одной прямой. Если «Второй» встречает оба катера, то в два разных момента он находится на этой прямой; он движется прямолинейно и равномерно, поэтому на ней лежит вся его траектория. Скорость «Второго» относительно «Первого» параллельна скорости катера относительно «Первого» — это условие и даёт u.

Обозначения. Скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{u}$ заданы относительно воды (земли), $\vec{u} \perp \vec{v}_1$. В системе отсчёта «Первого» скорость катера $\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v}_1$, скорость «Второго» $\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (закон сложения скоростей: в этой системе «Первый» покоится). Ось x направим по $\vec{v}_1$, ось y — перпендикулярно курсу «Первого» в сторону «Второго».

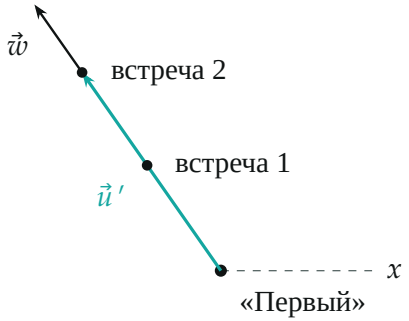


Рис. 2. Система отсчёта «Первого» (он неподвижен): оба катера идут по одной прямой (бирюзовая стрелка $\vec{u}\,'$), и «Второй» плывёт вдоль неё со скоростью $\vec{w}$, встречая катера в двух точках.

Шаг 1. Проекции скоростей в системе «Первого». Вектор $\vec{v}_2$ составляет угол α с осью x, поэтому $v_{2x} = v_2 \cos\alpha$, $v_{2y} = v_2 \sin\alpha$. Вектор $\vec{u}$ перпендикулярен $\vec{v}_1$: $u_x = 0$, $u_y = u$ (катер уходит в сторону «Второго»). Тогда

$$\vec{u}\,' = (-v_1;\, u), \qquad \vec{w} = (v_2 \cos\alpha - v_1;\, v_2 \sin\alpha).$$

Горизонтальная проекция $\vec{w}$ отрицательна, потому что $v_2 \cos\alpha < v_1$ ($15{,}8 < 35$).

Шаг 2. Условие параллельности. Векторы $\vec{u}\,'$ и $\vec{w}$ направлены одинаково, поэтому отношения их проекций равны: $\dfrac{u'_y}{u'_x} = \dfrac{w_y}{w_x}$. Равенство отношений катетов означает, что прямоугольные треугольники с катетами $(v_1;\, u)$ и $(v_1 - v_2\cos\alpha;\, v_2\sin\alpha)$ подобны (рис. 3):

$$\frac{u}{v_1} = \frac{v_2 \sin\alpha}{v_1 - v_2\cos\alpha}.$$

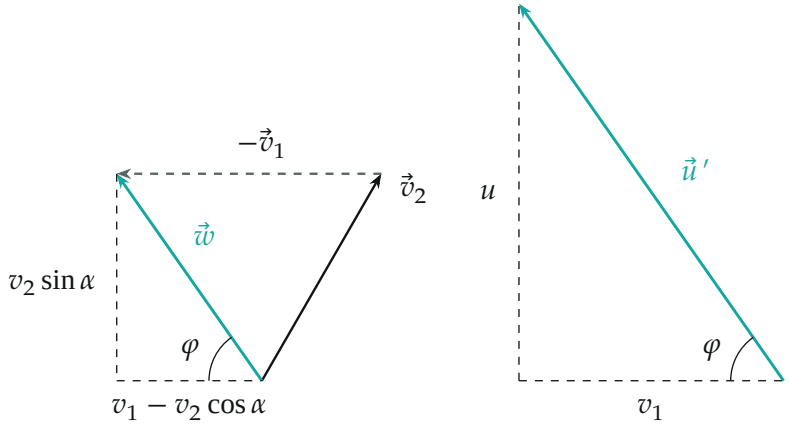


Рис. 3. Подобные прямоугольные треугольники: слева $\vec{w} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ с катетами $v_1 - v_2\cos\alpha$ и $v_2\sin\alpha$, справа $\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v}_1$ с катетами v_1 и u. Угол φ один и тот же.

Отсюда

$$u = \frac{v_1 v_2 \sin\alpha}{v_1 - v_2\cos\alpha} = \frac{35\cdot 31{,}6\cdot 0{,}866}{35 - 31{,}6\cdot 0{,}5}\ \text{км/ч} \approx 50\ \text{км/ч}.$$

Второй способ: система отсчёта воды. Пусть «Первый» и «Второй» прошли точку пересечения курсов O одновременно (так и есть: в первом способе вектор от «Первого» к «Второму» параллелен $\vec{w}$, а векторы $d_2\vec{e}_2 - d_1\vec{e}_1$ и $v_2\vec{e}_2 - v_1\vec{e}_1$ параллельны только при $d_2/d_1 = v_2/v_1$, где $d_{1,2}$ — расстояния до O, $\vec{e}_{1,2}$ — единичные векторы курсов). Катер отплывает в момент t, когда «Первый» на расстоянии $x = v_1 t$ от O, и идёт перпендикулярно курсу: встретит курс «Второго» в точке M с $OM = x/\cos\alpha$, пройдя путь $x\operatorname{tg}\alpha$ за время $x\operatorname{tg}\alpha/u$ (рис. 4). «Второй» к этому моменту прошёл $v_2(t + x\operatorname{tg}\alpha/u)$ и должен быть в M:

$$v_2\Big(t + \frac{v_1 t\operatorname{tg}\alpha}{u}\Big) = \frac{v_1 t}{\cos\alpha} \;\Rightarrow\; v_2\frac{v_1\operatorname{tg}\alpha}{u} = \frac{v_1}{\cos\alpha} - v_2 \;\Rightarrow\; u = \frac{v_1 v_2\sin\alpha}{v_1 - v_2\cos\alpha}.$$

Время t сократилось, поэтому подходит любой момент отплытия: два катера в разные моменты идут по параллельным путям и оба приходят ко «Второму».

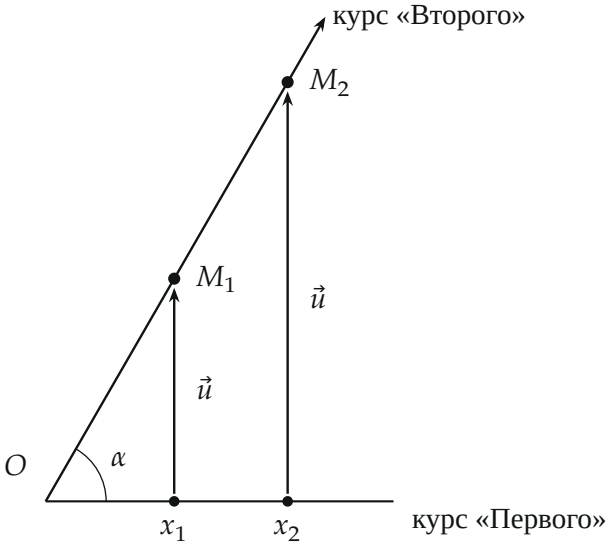


Рис. 4. Система воды: катер идёт перпендикулярно курсу «Первого» из точки на расстоянии x от O и встречает курс «Второго» в точке M.

Обратите внимание. Скорость катера $\vec{u}$ перпендикулярна курсу «Первого» в системе воды. В системе «Первого» катер идёт не перпендикулярно курсу: его скорость $\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v}_1$ имеет составляющую назад. Перпендикулярна курсу скорость именно относительно воды. Решение существует, только если $v_1 > v_2 \cos\alpha$: иначе знаменатель отрицателен и катер удалялся бы от «Второго».

Проверка. Размерность: скорость. Предел $\alpha \to 0$ (лайнеры на одном курсе, «Второй» сзади и медленнее): $u \to 0$; катер стоит на воде на общем курсе, и «Второй» подплывает к нему — так и должно быть. Численная проверка (python): катера, отплывающие через 1 ч и 3,5 ч после прохода точки O со скоростью 49,89 км/ч перпендикулярно курсу, оба встречают «Второй» (отклонение нулевое), отношения проекций u'_y/u'_x и w_y/w_x равны $-1{,}4253$.

Ответ. $u = \dfrac{v_1 v_2 \sin\alpha}{v_1 - v_2\cos\alpha} \approx 50$ км/ч.