Гантель на гладкой поверхности

Задача 2. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 2]

Гантель, состоящая из двух шариков массами m и $2m$ и лёгкого стержня длиной L, поставлена вертикально на гладкую горизонтальную поверхность более массивным шариком вниз. После небольшого толчка нижний шарик гантели начинает двигаться по горизонтальной поверхности, а верхний — двигаться в пространстве. Найдите модули скоростей V_1 и V_2 шариков в зависимости от синуса угла наклона β гантели к горизонту. Ускорение свободного падения равно g.

▲ **Решение. Что происходит.** Горизонтальных внешних сил на гантель нет: сила тяжести и реакция гладкого пола вертикальны. Значит, сохраняется горизонтальная проекция импульса, и центр масс движется только по вертикали, а шарики разъезжаются в стороны: верхний наклоняется вправо, нижний уезжает влево (рис. 1). Скорости двух шариков связаны двумя условиями: импульс по горизонтали сохраняется, стержень нерастяжим. Третье уравнение — закон сохранения энергии.

Обозначения. V_1 — модуль скорости верхнего шарика (масса m), V_2 — нижнего (масса $2m$), $s = \sin\beta$. Ось x направим по полу в сторону наклона гантели, ось y — вертикально вверх. Скорость нижнего шарика направлена по полу влево: $\vec{u} = (-V_2;\, 0)$; скорость верхнего $\vec{v} = (v_x;\, v_y)$, $V_1^2 = v_x^2 + v_y^2$ (рис. 2).

Шаг 1. Импульс по горизонтали. Система шарики + стержень, внешние силы вертикальны, поэтому в проекции на ось x импульс сохраняется. В начале гантель покоится, значит

$$m\,v_x + 2m\,(-V_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = 2V_2.$$

Верхний шарик движется вправо вдвое быстрее, чем нижний влево: центр масс стоит на месте по горизонтали.

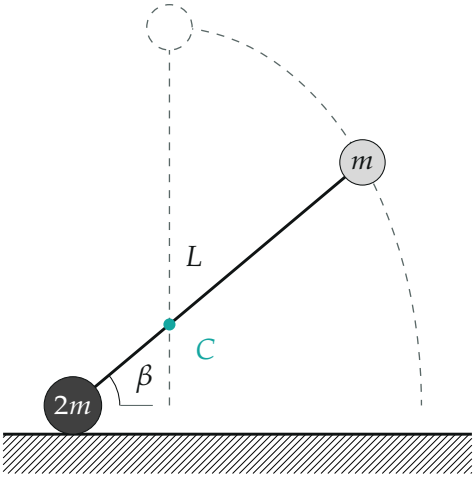


Рис. 1. Гантель в произвольный момент (чёрным) и в начале движения (серым). Центр масс C движется по вертикали, верхний шарик — по дуге эллипса с полуосями $\frac{2L}{3}$ и L, нижний уезжает влево.

Шаг 2. Нерастяжимость стержня. Длина стержня постоянна, поэтому скорость верхнего шарика относительно нижнего перпендикулярна стержню: у обоих шариков одинаковые проекции скоростей на направление стержня (рис. 3). Единичный вектор вдоль стержня от нижнего шарика к верхнему $\vec{e} = (\cos\beta;\, \sin\beta)$:

$$(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{e} = 0 \;\Rightarrow\; (v_x + V_2)\cos\beta + v_y \sin\beta = 0.$$

Подставим $v_x = 2V_2$:

$$3V_2 \cos\beta + v_y \sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = -3V_2 \frac{\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Знак минус: верхний шарик опускается. Квадрат его скорости:

$$V_1^2 = v_x^2 + v_y^2 = V_2^2\Big(4 + 9\,\frac{1 - s^2}{s^2}\Big) = V_2^2\,\frac{9 - 5s^2}{s^2}.$$

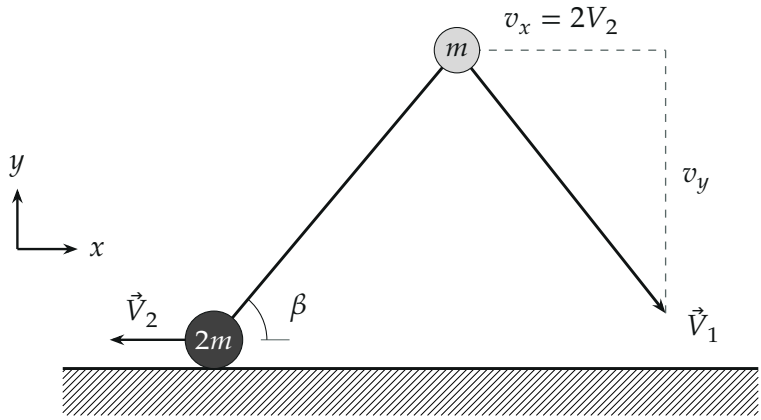


Рис. 2. Скорости шариков и разложение скорости верхнего: $\vec{V}_2$ направлена по полу, $v_x = 2V_2$ (шаг 1).

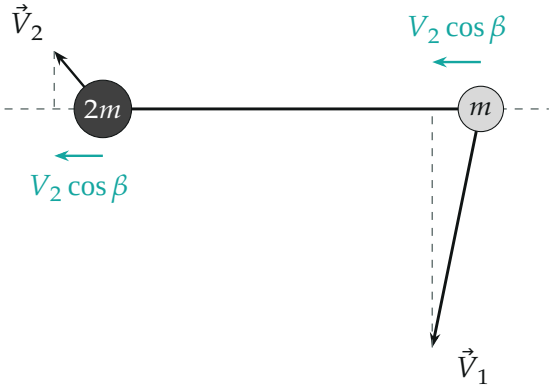


Рис. 3. Рисунок повёрнут: стержень горизонтален. У концов стержня одинаковые проекции скоростей на стержень, $V_2 \cos\beta$ у каждого. Остальная часть скорости верхнего шарика перпендикулярна стержню.

Шаг 3. Закон сохранения энергии. Пол гладкий, реакция опоры перпендикулярна скорости нижнего шарика, внутренние силы стержня работы не совершают (он нерастяжим), трения нет. Значит, механическая энергия системы постоянна. Нулевой уровень потенциальной энергии — центр нижнего шарика, он остаётся на нём. В начале

($\beta = 90°$, скорости нулевые) центр верхнего шарика на высоте L, в данный момент — на высоте $L\sin\beta = Ls$:

$$mgL = mgLs + \frac{2m\,V_2^2}{2} + \frac{m\,V_1^2}{2} \quad\Rightarrow\quad gL(1-s) = V_2^2 + \frac{V_1^2}{2}.$$

Подставим V_1^2 из шага 2:

$$gL(1-s) = V_2^2\Big(1 + \frac{9-5s^2}{2s^2}\Big) = V_2^2\,\frac{9-3s^2}{2s^2}.$$

Шаг 4. Скорости.

$$V_2^2 = \frac{2gL\,s^2(1-s)}{9-3s^2} \quad\Rightarrow\quad V_2 = \sin\beta\sqrt{\frac{2gL(1-\sin\beta)}{9-3\sin^2\beta}},$$

$$V_1^2 = V_2^2\,\frac{9-5s^2}{s^2} = \frac{2gL(1-s)(9-5s^2)}{9-3s^2},$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gL(1-\sin\beta)(9-5\sin^2\beta)}{9-3\sin^2\beta}}.$$

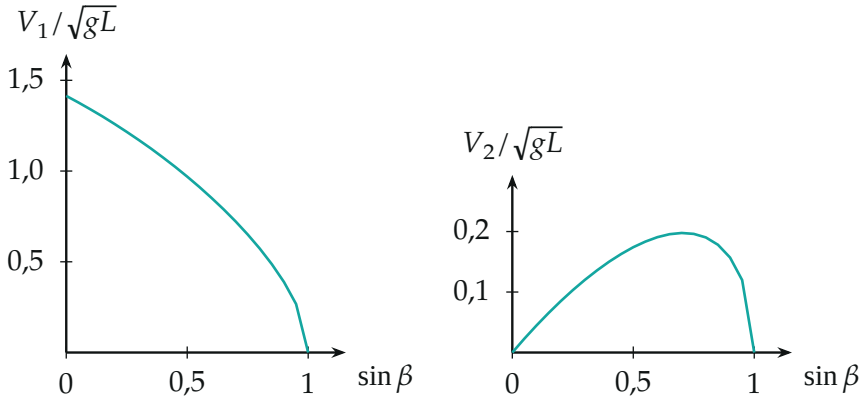


Рис. 4. Графики V_1 (слева) и V_2 (справа) от $\sin\beta$; $\sin\beta = 1$ соответствует началу движения. Масштабы по вертикали разные.

Обратите внимание. Нельзя считать, что верхний шарик движется по дуге вокруг неподвижного нижнего: тогда было бы $V_1^2 = 2gL(1 - s)$. Пол гладкий, нижний шарик уезжает, и часть энергии уходит в его движение. Второе: центр масс гантели падает по вертикали, а не по дуге.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gL}$ — скорость. Начало, $\sin\beta = 1$: обе скорости нулевые (рис. 4). Конец, $\sin\beta \to 0$: $V_2 \to 0$, $V_1 \to \sqrt{2gL}$ — верхний шарик падает вертикально с высоты L, нижний стоит.

Второй способ, через угол. Координаты шариков: $x_2 = x_C - \frac{L}{3}\cos\beta$, $x_1 = x_C + \frac{2L}{3}\cos\beta$, $y_1 = L\sin\beta$ (центр масс стоит на месте). Тогда

$$V_2 = \frac{L}{3}\,s\,|\dot\beta|, \qquad V_1^2 = L^2\dot\beta^2\Big(\frac{4}{9}s^2 + 1 - s^2\Big) = L^2\dot\beta^2\,\frac{9 - 5s^2}{9},$$

а энергия даёт $\dot\beta^2 = \dfrac{6g(1-s)}{L(3-s^2)}$. Подстановка возвращает те же формулы. Численный расчёт показывает, что реакция опоры остаётся положительной (не меньше $0{,}59 \cdot 3mg$): нижний шарик не отрывается от пола.

Ответ.

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gL(1-\sin\beta)(9-5\sin^2\beta)}{9-3\sin^2\beta}} \quad \text{(шарик массой } m\text{)},$$

$$V_2 = \sin\beta\sqrt{\frac{2gL(1-\sin\beta)}{9-3\sin^2\beta}} \quad \text{(шарик массой } 2m\text{)}.$$