КПД цикла из изотерм и изохор

Задача 3. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 3]

Идеальный газ сначала изотермически расширяют, затем охлаждают при постоянном объёме, пока его температура (в кельвинах) не уменьшится в два раза, после чего газ изотермически сжимают до первоначального объёма и, наконец, завершая циклический процесс, изохорно возвращают в исходное состояние, сообщая такое же количество теплоты, что и при изотермическом расширении. Определите КПД этого цикла.

▲ **Решение. Что происходит.** Цикл состоит из двух изотерм и двух изохор (рис. 1). На изохоре работа не совершается, на изотерме идеального газа внутренняя энергия не меняется, поэтому там теплота равна работе. КПД — это работа за цикл, делённая на всю полученную газом теплоту. Теплоту газ получает дважды: на изотерме расширения и при изохорном нагреве, и по условию эти две порции равны.

Обозначения. ν — количество газа, T — температура первой изотермы, V_1 и $V_2 > V_1$ — объёмы в начале и конце расширения, $r = V_2/V_1$. Состояния: 1 — (V_1, T), 2 — (V_2, T), 3 — $(V_2, T/2)$, 4 — $(V_1, T/2)$. Теплота $Q > 0$, если газ её получает.

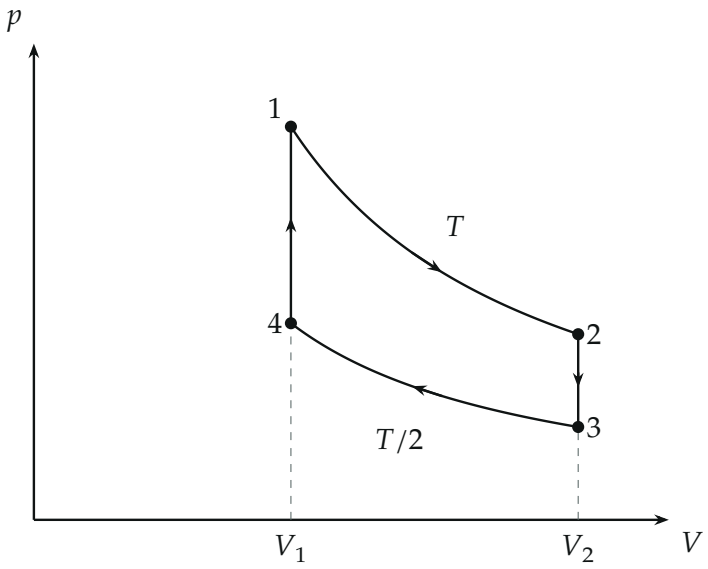


Рис. 1. Цикл на диаграмме p–V: $1 \to 2$ — изотерма расширения при T, $2 \to 3$ — изохорное охлаждение, $3 \to 4$ — изотерма сжатия при $T/2$, $4 \to 1$ — изохорный нагрев.

Шаг 1. Изотерма $1 \to 2$**.** Температура постоянна, поэтому $\Delta U = 0$, и по первому закону термодинамики вся полученная теплота равна работе газа:

$$Q_{12} = A_{12} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln r > 0.$$

Шаг 2. Изохора $2 \to 3$**.** Объём не меняется, работа равна нулю; газ охлаждается от T до $T/2$ и отдаёт теплоту. Её учтём в проверке.

Шаг 3. Изотерма $3 \to 4$**.** Сжатие при температуре $T/2$ от V_2 до V_1. Работа газа отрицательна, теплота равна ей и тоже отрицательна (газ отдаёт её):

$$A_{34} = Q_{34} = \nu R \frac{T}{2} \ln \frac{V_1}{V_2} = -\frac{1}{2} \nu RT \ln r = -\frac{1}{2} Q_{12}.$$

Логарифм объёмов тот же, а температура вдвое меньше: работа на нижней изотерме вдвое меньше по модулю, чем на верхней (рис. 2).

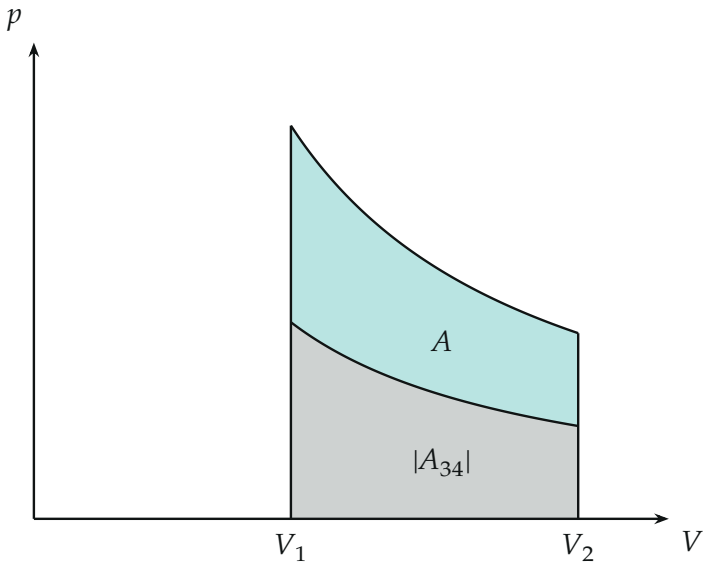


Рис. 2. Работа цикла A (бирюзовая область) и модуль работы на нижней изотерме (серая область): $A = A_{12} - |A_{34}|$.

Шаг 4. Изохора $4 \to 1$**.** Работы нет, температура растёт от $T/2$ до T, теплота идёт на нагрев: $Q_{41} = \nu C_V \dfrac{T}{2}$ (C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме). По условию эта порция равна теплоте изотермического расширения:

$$Q_{41} = Q_{12}.$$

Оно связывает r с теплоёмкостью газа ($\ln r = C_V/2R$), но для ответа важно лишь, что обе подведённые порции равны одному Q_{12}.

Шаг 5. Работа цикла. Работа на изохорах равна нулю:

$$A = A_{12} + A_{34} = Q_{12} - \frac{1}{2}\,Q_{12} = \frac{1}{2}\,Q_{12}.$$

Шаг 6. Полученная теплота и КПД. Газ получает теплоту на двух участках: $1 \to 2$ и $4 \to 1$:

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{41} = 2Q_{12}.$$

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{\frac{1}{2}Q_{12}}{2Q_{12}} = \frac{1}{4}.$$

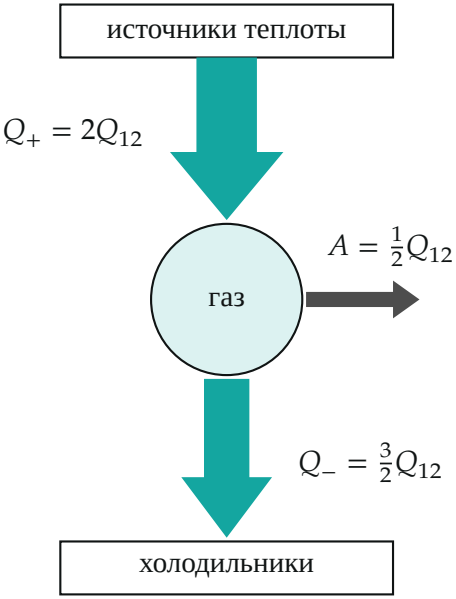


Рис. 3. Тепловые потоки цикла (толщина стрелок — по величине): всё подведённое тепло Q_+ делится на работу A и отданное холодильникам Q_-.

Обратите внимание. Делить работу на одну лишь Q_{12} нельзя: газ получает теплоту и при изохорном нагреве, а КПД считается по всей полученной теплоте. Тогда получилось бы $\frac{1}{2}$, а это неверный ответ.

Проверка. Теплота, отданная газом, по первому закону: $Q_- = |Q_{23}| + |Q_{34}| = \nu C_V \frac{T}{2} + \frac{1}{2}Q_{12} = Q_{12} + \frac{1}{2}Q_{12} = \frac{3}{2}Q_{12}$ (здесь $\nu C_V T/2 = Q_{41} = Q_{12}$). Баланс энергии за цикл: $A = Q_+ - Q_- = 2Q_{12} - \frac{3}{2}Q_{12} = \frac{1}{2}Q_{12}$, как в шаге 5 (рис. 3). КПД меньше КПД идеальной машины Карно между температурами T и $T/2$, равного $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Ответ. $\eta = \frac{1}{4}$.