Сила на заряд в бесконечной системе

Задача 4. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 4]

Найдите модуль электростатической силы, действующей на точечный заряд Q в бесконечной системе точечных зарядов, изображённой на рисунке. Все заряды закреплены в вакууме на одной прямой, имеют одинаковый знак, расстояния между соседними зарядами одинаковы и равны a.

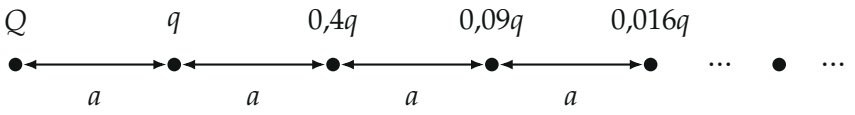


Рис. 1. Рисунок условия: заряды Q, q, $0{,}4q$, $0{,}09q$, $0{,}016q$, … на одной прямой с шагом a.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на принцип суперпозиции: сила на Q — векторная сумма кулоновских сил от всех зарядов цепочки. Все заряды одного знака и лежат по одну сторону от Q, поэтому все силы направлены в одну сторону и векторная сумма сводится к сумме модулей. Бесконечная сумма окажется убывающей геометрической прогрессией.

Обозначения. Нумеруем заряды справа от Q: $q_1 = q$, $q_2 = 0{,}4q$, $q_3 = 0{,}09q$, $q_4 = 0{,}016q$, … Заряд номер n находится на расстоянии $r_n = na$ от Q. Постоянная $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Ось x направим вдоль прямой от Q к остальным зарядам.

1. Закон, который угадывается из рисунка. Выразим заряды через q и номер n:

$$\frac{q_1}{1^2} = q, \qquad \frac{q_2}{2^2} = \frac{0{,}4q}{4} = 0{,}1\,q,$$

$$\frac{q_3}{3^2} = \frac{0{,}09q}{9} = 0{,}01\,q, \qquad \frac{q_4}{4^2} = \frac{0{,}016q}{16} = 0{,}001\,q.$$

Отношение q_n/n^2 уменьшается в 10 раз при переходе к следующему номеру: $q_n/n^2 = q \cdot 10^{-(n-1)}$. Эта закономерность на четырёх зарядах

подтверждается без исключений; её и продолжаем на всю цепочку (рисунок условия показывает продолжение многоточием).

2. Сила от одного заряда. Закон Кулона для Q и q_n на расстоянии na: заряды одного знака, значит, Q отталкивается от q_n, то есть сила направлена против оси x, а её проекция на ось x отрицательна; модуль

$$F_n = k\frac{Qq_n}{(na)^2} = \frac{kQ}{a^2}\cdot\frac{q_n}{n^2} = \frac{kQq}{a^2}\,10^{-(n-1)}.$$

Квадрат расстояния n^2a^2 в знаменателе сокращается с n^2 в заряде (рис. 2).

3. Суперпозиция. Все F_n направлены одинаково, поэтому модуль равнодействующей равен сумме модулей:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n = \frac{kQq}{a^2}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right).$$

В скобках бесконечная геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем $\frac{1}{10} < 1$ (сходится), её сумма $\dfrac{1}{1-1/10} = \dfrac{10}{9}$.

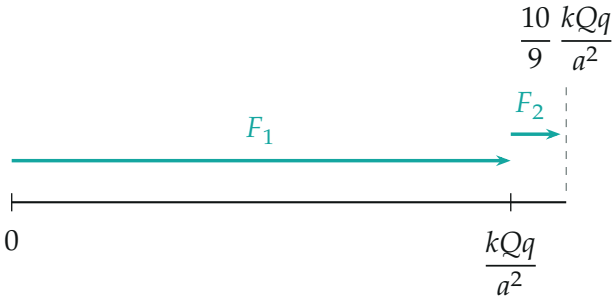


Рис. 2. Модули сил на одной прямой в единицах kQq/a^2: F_1 — отрезок до 1, F_2 — в 10 раз короче, F_3 и далее не видны.

4. Итог.

$$F = \frac{10}{9}\frac{kQq}{a^2} = \frac{10}{9}\cdot\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{5}{18\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a^2}.$$

Сила направлена от цепочки (вдоль $-x$): заряды отталкивают Q.

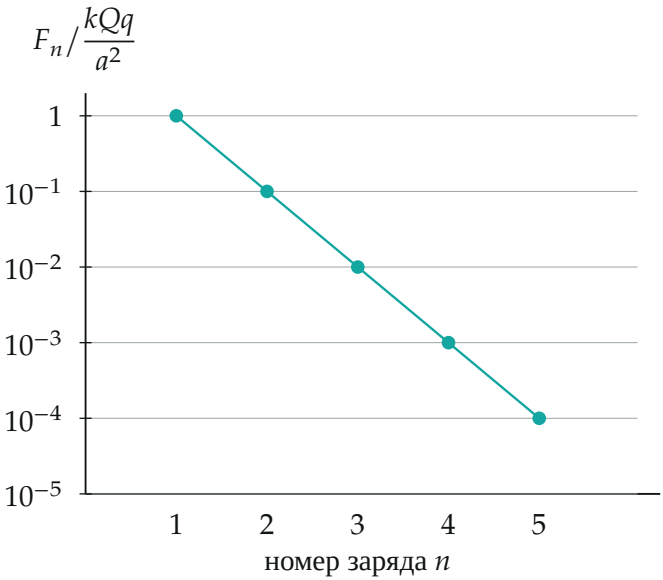


Рис. 3. Силы F_n от последовательных зарядов (вертикальная ось логарифмическая): точки лежат на прямой, то есть убывают в геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{10}$.

Обратите внимание. Расстояние до n-го заряда равно na, а не a: без квадрата n^2 из закона Кулона закономерность $q_n \propto n^2 \cdot 10^{-(n-1)}$ не заметна. И силы складываются арифметически только потому, что все заряды лежат с одной стороны от Q; будь заряды по обе стороны, силы вычитались бы.

Проверка. Размерность: kQq/a^2 — сила. Один лишь ближайший заряд q дал бы $F_1 = kQq/a^2$; остальные добавляют $\frac{1}{9}$ от этого, около 11%, как и должно быть при отношении сил соседних зарядов $1 : 10$.

Ответ. $F = \dfrac{5}{18\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{a^2}$ (отталкивание от цепочки зарядов).