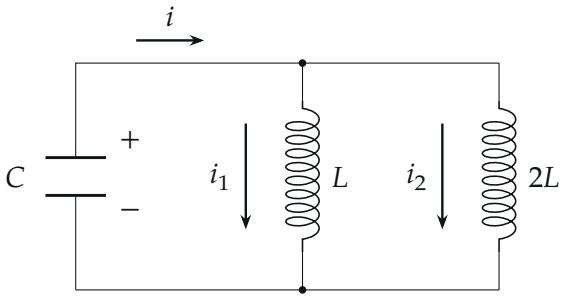
Разряд конденсатора на две катушки

Задача 5. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 5] Заряженный конденсатор ёмкостью C, электростатическая энергия которого равна W, начинает разряжаться через две соединённые параллельно катушки индуктивностями L и $2L$. Какой будет максимальная энергия катушки индуктивностью L в процессе возникающих колебаний? Сопротивлением электрической цепи пренебречь.



Поясняющий рисунок: схема цепи. Стрелки — выбранные положительные направления токов: i — через конденсатор, i_1 — в катушке L, i_2 — в катушке $2L$.

▲ **Решение. Что происходит.** Сопротивления нет, поэтому энергия не расходуется: полная энергия W перекачивается между электрическим полем конденсатора и магнитными полями катушек. Магнитная энергия обеих катушек вместе наибольшая в тот момент, когда конденсатор полностью разряжён, и тогда она равна W. Остаётся выяснить, как эта энергия делится между катушками: параллельно соединённые катушки делят её в постоянной пропорции.

Обозначения. u — напряжение на конденсаторе; катушки подключены параллельно к нему, поэтому напряжение на каждой тоже u. i_1, i_2 — токи в катушках L и $2L$ (направления — на рисунке), W_1, W_2 — их энергии, W_C — энергия конденсатора.

1. Связь токов в катушках. Сопротивление катушек нулевое, значит напряжение на катушке целиком равно ЭДС самоиндукции с обратным

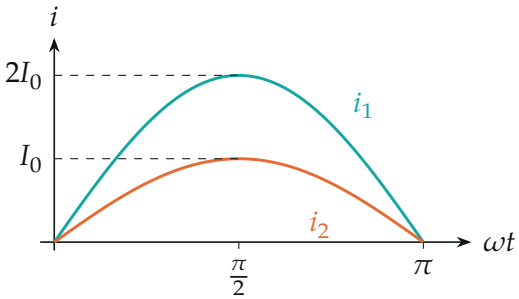
знаком: $u = L\dfrac{di_1}{dt}$ для первой и $u = 2L\dfrac{di_2}{dt}$ для второй. Напряжение на них одно и то же, поэтому

$$L\frac{di_1}{dt} = 2L\frac{di_2}{dt}.$$

В начале токов не было. Сложим малые приращения за всё время от начала до произвольного момента: $L\,i_1 = 2L\,i_2$, то есть

$$i_1 = 2\,i_2 \quad \text{в любой момент.}$$

Обратите внимание: равны не токи, а магнитные потоки $L\,i_1$ и $2L\,i_2$ — у обеих катушек одно и то же приращение потока при одном и том же напряжении. Поэтому в катушке с меньшей индуктивностью ток больше.



Токи в катушках за полпериода: в любой момент $i_1 = 2i_2$, поэтому и максимумы наступают одновременно.

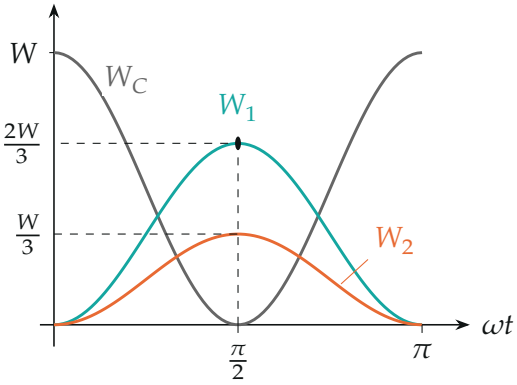
2. Как делится энергия между катушками. Энергия катушки с током i равна $\dfrac{Li^2}{2}$ (для каждой — со своей индуктивностью):

$$W_1 = \frac{L\,i_1^2}{2} = \frac{L\,(2i_2)^2}{2} = 2L\,i_2^2, \qquad W_2 = \frac{2L\,i_2^2}{2} = L\,i_2^2.$$

Отсюда $W_1 = 2W_2$, и в любой момент на катушку L приходится доля

$$\frac{W_1}{W_1 + W_2} = \frac{2}{3}$$

всей магнитной энергии. Доля не зависит от времени.



Энергии в ходе колебаний (W_C — конденсатор, W_1 — катушка L, W_2 — катушка $2L$) за половину периода.

3. Когда энергия катушки L наибольшая. Потерь нет, поэтому по закону сохранения энергии для системы «конденсатор + две катушки» в любой момент

$$W_C + W_1 + W_2 = W, \qquad W_1 = \frac{2}{3}(W_1 + W_2) = \frac{2}{3}(W - W_C).$$

Энергия W_1 тем больше, чем меньше W_C. Наименьшее значение $W_C = 0$ достигается: цепь — колебательный контур, заряд конденсатора меняется по закону косинуса и проходит через ноль. В этот момент $u = 0$, токи наибольшие, вся энергия W — магнитная:

$$W_{1\,\max} = \frac{2}{3}W.$$

Проверка. Второй способ: параллельные катушки — одна с $L_э = \frac{2L}{3}$ (так как $\frac{1}{L_э} = \frac{1}{L} + \frac{1}{2L}$), ток через неё $i = i_1 + i_2 = 3i_2$, энергия $\frac{L_э i^2}{2} = 3L\,i_2^2 = W_1 + W_2$ — как в шаге 2. В общем виде доля первой катушки $\frac{L_2}{L_1 + L_2}$: при $L_2 \to \infty$ она берёт всю энергию, при $L_2 \to 0$ — ноль; при

$L_2 = 2L$ получаем $\frac{2}{3}$.

Смысл: катушка с меньшей индуктивностью берёт больше энергии.

Ответ. $W_{1\,\max} = \frac{2W}{3}$.