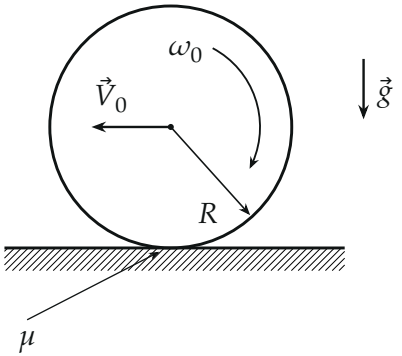
Хула-хуп с проскальзыванием

Задача 6. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 6] «Игра с хула-хупом». «Хула-хуп» — это обруч, который девушки крутят на талии, а спортсменки проделывают с ним и другие «фокусы». Например, закручивают его в вертикальной плоскости и толкают от себя по горизонтали, после чего вращающийся обруч, проскальзывая по полу, отъезжает от них на некоторое расстояние и возвращается обратно.

Сформулируем задачу так: обруч радиусом R в момент толчка (см. рисунок) закручен вокруг горизонтальной оси до угловой скорости ω_0, и ему придали скорость $\vec{V}_0$, направленную вдоль пола перпендикулярно оси вращения. Коэффициент трения обруча об пол равен μ.

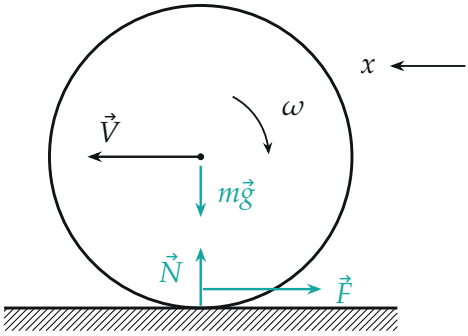


1) На какое максимальное расстояние в направлении скорости $\vec{V}_0$ обруч удалится от начальной точки?
2) Какова будет его угловая скорость в момент остановки?
3) С какой скоростью он будет катиться после окончания проскальзывания по полу?
4) Как связаны V_0 и ω_0, если проскальзывание прекращается в момент возврата в исходную точку?

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на плоское движение твёрдого тела с трением скольжения. Обруч закручен так, что его нижняя точка движется вперёд, туда же, куда центр: он скользит, и постоянная сила

трения скольжения направлена назад. Она тормозит и центр (он остановится и поедет обратно), и вращение. Когда скорость нижней точки обнулится, проскальзывание кончится, и дальше обруч катится с постоянной скоростью. Ключ — два уравнения с одной силой: для центра и для вращения.

Обозначения. Ось x направим вдоль $\vec{V}_0$ (на рисунке — влево), V — проекция скорости центра на неё. $\omega > 0$ — угловая скорость в исходную сторону (по часовой стрелке на рисунке); нижняя точка движется относительно центра со скоростью ωR вдоль $+x$, поэтому $u = V + \omega R$ — проекция её скорости относительно пола. m — масса обруча, F — сила трения, N — сила реакции пола.



Силы, действующие на обруч, пока он проскальзывает: $F = \mu N$ приложена к нижней точке и направлена назад (вдоль $-x$).

1. Силы. По вертикали центр обруча не движется, поэтому второй закон Ньютона в проекции на вертикаль даёт $N = mg$. Пока нижняя точка скользит ($u > 0$), трение — скольжения, постоянное:

$$F = \mu N = \mu mg, \qquad \text{направлена вдоль } -x.$$

Обратите внимание: $F = \mu N$ верно только при скольжении; после его конца трения нет (пункт 3).

2. Движение центра. Второй закон Ньютона для центра обруча в проекции на ось x (по горизонтали больше сил нет):

$$m\frac{dV}{dt} = -F \;\Rightarrow\; \frac{dV}{dt} = -\mu g, \qquad V(t) = V_0 - \mu g\, t.$$

3. Вращение. Обруч тонкий, вся масса на расстоянии R от оси, поэтому момент инерции относительно оси через центр $I = mR^2$. Основное уравнение вращения: момент силы F относительно центра равен FR, и он направлен против вращения (сила тянет нижнюю точку назад, а вращение несёт её вперёд):

$$mR^2\,\frac{d\omega}{dt} = -FR \quad\Rightarrow\quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\mu g}{R}, \qquad \omega R = \omega_0 R - \mu g\, t.$$

V и ωR убывают с одной скоростью μg, поэтому скорость нижней точки — вдвое быстрее:

$$u = V + \omega R = (V_0 + \omega_0 R) - 2\mu g\, t.$$

Проскальзывание кончится в момент $t_к$ ($u = 0$):

$$t_к = \frac{V_0 + \omega_0 R}{2\mu g}.$$

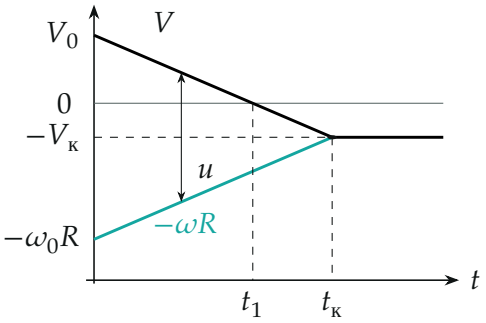


График при $\omega_0 R = 2V_0$. Расстояние между линиями — $u = V + \omega R$; в момент $t_к$ оно равно нулю.

Пункт 1. Наибольшее удаление. Центр останавливается ($V = 0$) в момент $t_1 = \dfrac{V_0}{\mu g}$. Путь — по закону равнопеременного движения с ускорением $-\mu g$:

$$S_{\max} = V_0 t_1 - \frac{\mu g\, t_1^2}{2} = \frac{V_0^2}{2\mu g}.$$

Остановка должна произойти раньше конца проскальзывания: $t_1 < t_к$, то есть $\dfrac{V_0}{\mu g} < \dfrac{V_0 + \omega_0 R}{2\mu g}$, откуда $V_0 < \omega_0 R$. Иначе обруч покатится вперёд, не останавливаясь, и не вернётся.

Пункт 2. Угловая скорость в момент остановки. Подставим t_1 в $\omega R = \omega_0 R - \mu g\, t$:

$$\omega_1 R = \omega_0 R - V_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_0 - \frac{V_0}{R} > 0.$$

Обруч ещё вращается в прежнюю сторону, трение по-прежнему направлено назад и разгоняет центр обратно.

Пункт 3. Скорость качения после проскальзывания. В момент $t_к$ проекция скорости центра

$$V(t_к) = V_0 - \mu g\, t_к = V_0 - \frac{V_0 + \omega_0 R}{2} = -\frac{\omega_0 R - V_0}{2} < 0.$$

Центр движется против оси x, то есть обратно к тому, кто толкал; его скорость по модулю

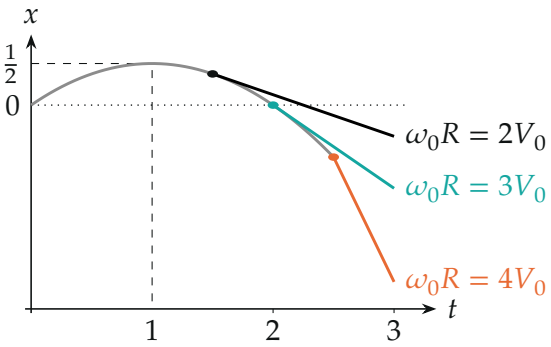
$$V_к = \frac{\omega_0 R - V_0}{2} > 0.$$

При этом $\omega R = V_к$: нижняя точка покоится, горизонтальных сил больше нет, и обруч катится с постоянной скоростью $V_к$.

Пункт 4. Возврат в исходную точку в момент конца проскальзывания. Пока идёт проскальзывание, $x(t) = V_0 t - \dfrac{\mu g\, t^2}{2}$; это равно нулю при $t = 0$ и при $t = \dfrac{2V_0}{\mu g}$. Нужно, чтобы вторая из этих точек была концом проскальзывания:

$$\frac{2V_0}{\mu g} = \frac{V_0 + \omega_0 R}{2\mu g} \quad \Rightarrow \quad 4V_0 = V_0 + \omega_0 R \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{\omega_0 R}{3}.$$

Условие $V_0 < \omega_0 R$ при этом выполнено.



Положение центра $x(t)$ при трёх значениях $\omega_0 R$ (x — в единицах $V_0^2/\mu g$, t — в $V_0/\mu g$). Серая парабола — движение при непрерывном проскальзывании; точки — концы проскальзывания, после них идут прямые (качение). Пунктир — начальная точка $x = 0$. При $\omega_0 R = 3V_0$ (бирюзовая) возврат в неё совпадает с концом проскальзывания.

Проверка. Второй способ для пункта 3 — закон сохранения момента импульса относительно точки пола: трение лежит на полу, $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ компенсируют друг друга на одной вертикали, момент внешних сил нулевой. $L = mR\,(V - \omega R)$ (центр на высоте R и вращение дают противоположные вклады); в начале и при $t_к$ ($V = -V_к$, $\omega R = V_к$):

$$V_0 - \omega_0 R = -V_к - V_к \quad \Rightarrow \quad V_к = \frac{\omega_0 R - V_0}{2},$$

как и получилось. Предел: при $\omega_0 = 0$ обруч скользит, как брусок, и $S_{\max} = \dfrac{V_0^2}{2\mu g}$.

Смысл: трение гасит поступательное и вращательное движения вместе, пока они не согласуются ($V = -\omega R$).

Ответ. 1) $S_{\max} = \dfrac{V_0^2}{2\mu g}$; 2) $\omega_1 = \omega_0 - \dfrac{V_0}{R}$ (при этом $V_0 < \omega_0 R$); 3) $V_к = \dfrac{\omega_0 R - V_0}{2} > 0$, обруч катится обратно к начальной точке; 4) $V_0 = \dfrac{\omega_0 R}{3}$.