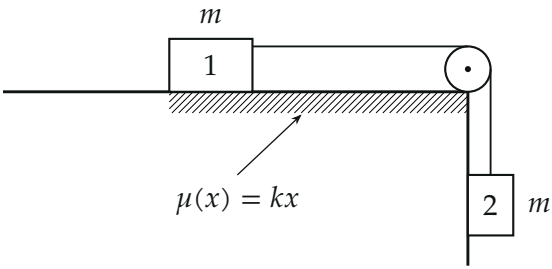
Груз с трением, зависящим от координаты

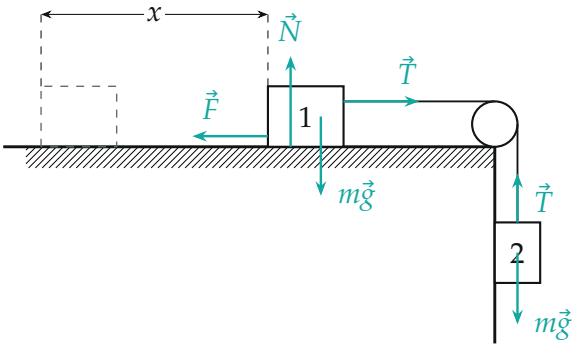
Задача 7. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 7] На длинном горизонтальном столе лежит груз 1 массой m, к которому привязана лёгкая нерастяжимая нить. Эта нить перекинута через установленный на краю стола невесомый блок, который может вращаться без трения, и ко второму концу нити прикреплён такой же груз 2. Сначала груз 1 удерживают неподвижно, так, что груз 2 свободно висит на нити, а затем груз 1 отпускают без начальной скорости. При движении системы на груз 1 действует сила сухого трения, причём коэффициент трения скольжения зависит от координаты x груза 1 по закону $\mu(x) = kx$ (координата x отсчитывается от начального положения груза 1).



1) Какой путь пройдёт груз 1 после отпускания?
2) Какую максимальную скорость будут иметь грузы в процессе движения этой системы?
3) Найдите максимальное значение модуля силы натяжения нити в процессе движения этой системы.
4) Изобразите график зависимости проекции ускорения груза 1 на направление его движения от координаты x и график зависимости модуля силы натяжения нити от времени.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на динамику связанных тел с переменной силой. Грузы на нерастяжимой нити движутся с одним ускорением: разгоняет их тяжесть груза 2, тормозит растущее трение груза 1 ($\mu = kx$). Сначала тяжесть сильнее и грузы разгоняются, потом трение перевешивает, и они останавливаются. Сила трения линейна по x, поэтому её работу считаем через среднее значение.

Обозначения. Ось x направлена вдоль стола к блоку, начало — начальное положение груза 1. a — проекция ускорения груза 1 на ось x; у груза 2 ускорение вниз такое же. T — сила натяжения нити (одна и та же с обеих сторон блока: он невесомый и без трения), N — реакция стола, F — сила трения.



Силы в произвольный момент, когда груз 1 прошёл расстояние x. Штриховой контур — начальное положение груза 1.

1. Силы, действующие на груз 1. По вертикали груз не движется, нить горизонтальна: $N = mg$. Трение скольжения направлено против движения:

$$F = \mu N = kx \cdot mg.$$

Обратите внимание: трение растёт с путём, a не постоянно, формулы равноускоренного движения не годятся.

2. Ускорение как функция x. Второй закон Ньютона для груза 1 в проекции на ось x, и для груза 2 в проекции на вертикаль вниз (ускорения равны по модулю, T одна и та же):

$$ma = T - kmg\,x, \qquad ma = mg - T.$$

Сложим уравнения — неизвестное T уходит:

$$2ma = mg - kmg\,x \;\Rightarrow\; a = \frac{g}{2}(1 - kx).$$

Формула верна, пока грузы движутся. При $x_0 = \dfrac{1}{k}$ ускорение равно нулю: до этой точки грузы разгоняются, после — тормозят, значит, скорость наибольшая в x_0.

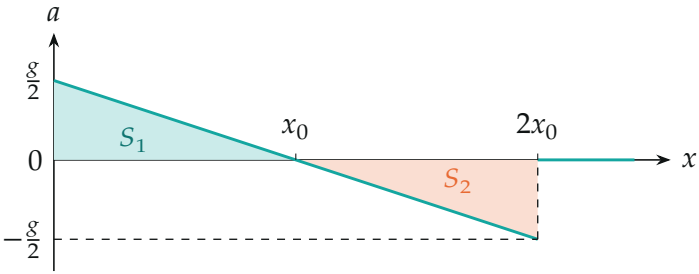


График $a(x)$. После остановки в точке $2x_0$ грузы покоятся, $a = 0$. Заштрихованные площади $S_1 = S_2$ (см. пункт 3).

3. Пункт 1: путь до остановки. *Первый способ — теорема о кинетической энергии системы:* на всём пути $x_{\max}$ она меняется от нуля до нуля, значит, работа всех сил равна нулю. Работа тяжести груза 2 равна $mg\,x_{\max}$, работа трения — минус среднее значение силы $\frac{1}{2}kmg\,x_{\max}$, умноженное на путь:

$$mg\,x_{\max} - \frac{kmg\,x_{\max}}{2}\,x_{\max} = 0 \quad\Rightarrow\quad x_{\max} = \frac{2}{k} = 2x_0.$$

Второй способ — по графику. Из $v\,dv = a\,dx$ получаем $\dfrac{v^2}{2} = \displaystyle\int_0^x a\,dx$ — площадь под графиком $a(x)$ (выше оси — со знаком плюс, ниже — со знаком минус). Скорость обнулится, когда отрицательная площадь сравняется с положительной: треугольники симметричны относительно x_0, $S_1 = S_2$ при $x = 2x_0$.

Обратите внимание: после остановки грузы стоят: тянет mg, а предельное трение в этой точке $2mg > mg$.

4. Пункт 2: максимальная скорость. Скорость наибольшая при $a = 0$, то есть в точке $x_0 = \dfrac{1}{k}$. Та же теорема о кинетической энергии систе-

мы (масса $2m$) на пути от 0 до x_0:

$$mg\,x_0 - \frac{kmg\,x_0}{2}\,x_0 = \frac{2m\,V_{\max}^2}{2} \quad\Rightarrow\quad V_{\max}^2 = g\,x_0\Big(1 - \frac{kx_0}{2}\Big) = \frac{g}{2k}.$$

По графику: $\dfrac{V_{\max}^2}{2} = S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{g}{2}\cdot x_0 = \dfrac{g}{4k}$ — то же.

5. Пункт 3: сила натяжения. Из уравнения для груза 2: $T = m(g-a)$. Подставим $a(x)$:

$$T = m\Big(g - \frac{g}{2}\,(1-kx)\Big) = \frac{mg}{2}\,(1+kx).$$

Сила растёт с x и наибольшая в конце пути, $x = 2x_0 = \dfrac{2}{k}$:

$$T_{\max} = \frac{mg}{2}\,(1+2) = \frac{3mg}{2}.$$

В конце груз 2 тормозится (ускорение $\frac{g}{2}$ вверх), поэтому нить тянет сильнее mg.

6. Пункт 4: график $T(t)$**.** Нужна зависимость от времени, поэтому найдём $x(t)$. Уравнение $x'' = \dfrac{g}{2}(1-kx)$ — гармонические колебания около $x_0 = \dfrac{1}{k}$ с частотой $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{gk}{2}}$. Начальные условия $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ дают

$$x(t) = x_0\,(1 - \cos\omega_0 t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\omega_0},$$

к моменту $t = \pi/\omega_0$ получаем $x = 2x_0$: остановка. Подставим в $T = \frac{mg}{2}(1+kx)$:

$$T(t) = \frac{mg}{2}\,(2 - \cos\omega_0 t) = mg\Big(1 - \frac{1}{2}\cos\omega_0 t\Big).$$

Сразу после отпускания $T = \frac{mg}{2}$, в момент остановки $t = \pi/\omega_0$ — $\frac{3mg}{2}$;

затем груз 2 покоится, и T скачком становится mg.

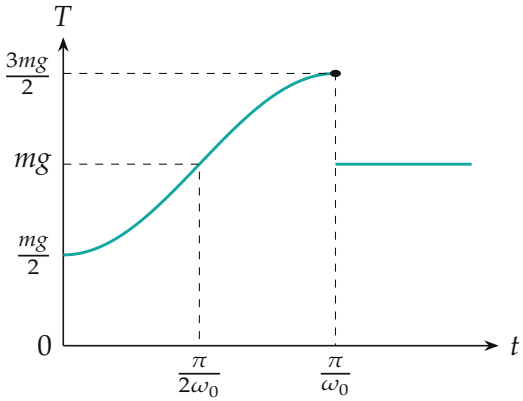


График $T(t)$ с момента отпускания. После остановки ($t = \pi/\omega_0$) $T = mg$.

Проверка. Размерность: k — 1/м, $x_{\max} = 2/k$ — метры, $V_{\max}^2 = g/(2k)$ — м^2/с^2. Предел $k \to 0$ (трения нет): $x_{\max} \to \infty$, $V_{\max} \to \infty$ — грузы разгоняются без остановки. Второй способ для пункта 3 — через груз 1: $T = ma + kmg\,x = \frac{mg}{2}(1 + kx)$, то же.

Смысл: грузы проходят половину гармонического колебания около точки равновесия x_0.

Ответ. 1) $x_{\max} = \dfrac{2}{k}$; 2) $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{g}{2k}}$; 3) $T_{\max} = \dfrac{3mg}{2}$; 4) $a = \dfrac{g}{2}(1 - kx)$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{k}$; $T = mg\left(1 - \dfrac{1}{2}\cos\omega_0 t\right)$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{gk}{2}}$ (графики — на рисунках).