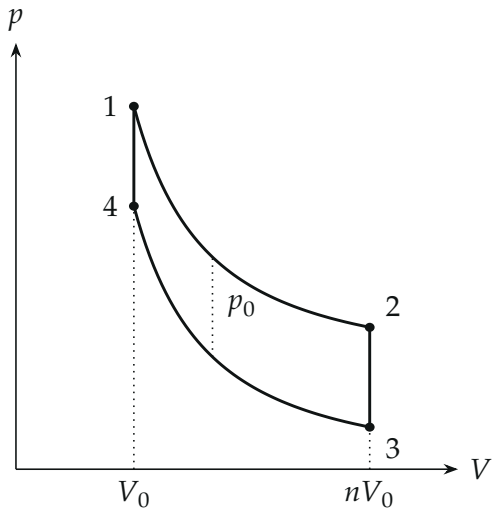
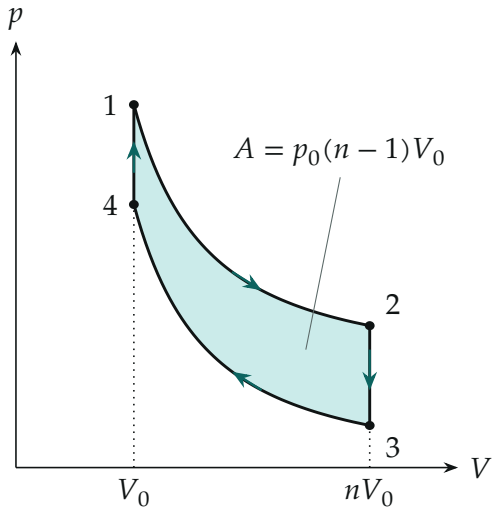
Цикл с адиабатой и изохорами

Задача 8. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 8] Над идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс 1–2–3–4–1, график которого изображён на pV-диаграмме. Минимальный объём газа равен V_0, а максимальный — в n раз больше. Участки 2–3 и 4–1 — изохоры, участок 3–4 — адиабата, а участок 1–2 получен из участка 3–4 сдвигом на отрезок длиной p_0 вверх вдоль оси давления. Определите количества теплоты, полученные или отданные на участках 1–2, 2–3, 4–1, а также КПД этого цикла.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Газ одноатомный, поэтому его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}pV$ (для любого количества газа, ведь $pV = \nu RT$). Цикл состоит из двух изохор, где работа равна нулю и теплота равна изменению U, адиабаты, где теплоты нет, и участка 1–2, где нужны и работа, и изменение U. Главная идея — сдвиг кривой на p_0 вверх: при каждом объёме давление на участке 1–2 ровно на p_0 больше, чем на 3–4. Поэтому разность давлений на обеих изохорах равна p_0, а работа цикла — площадь полоски шириной $(n-1)V_0$ и высотой p_0.

Обозначения. p_1, p_2, p_3, p_4 — давления в точках 1–4. Объёмы: $V_1 = V_4 = V_0$, $V_2 = V_3 = nV_0$. Из сдвига: $p_1 = p_4 + p_0$, $p_2 = p_3 + p_0$. Сами p_3, p_4 нам не известны — и не понадобятся.



Цикл обходится по часовой стрелке (стрелки на линиях). Закрашенная полоска — работа газа за цикл.

1. Изохоры 4–1 и 2–3. Объём не меняется, работа $A = 0$, и первое начало термодинамики даёт $Q = \Delta U = \frac{3}{2} V \Delta p$. Нужны только разности давлений, а они известны:

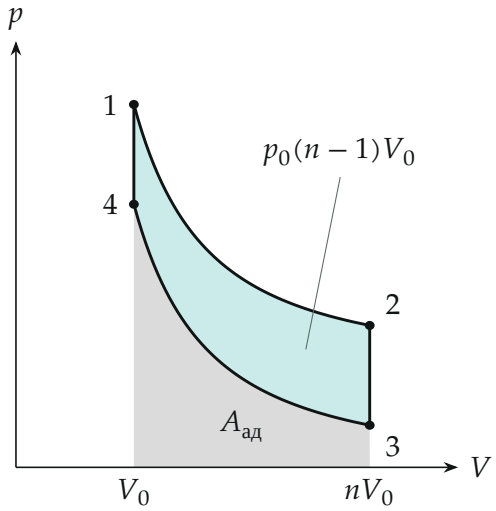
$$Q_{41} = \frac{3}{2} V_0 (p_1 - p_4) = \frac{3}{2} p_0 V_0 > 0,$$
$$Q_{23} = \frac{3}{2} nV_0 (p_3 - p_2) = -\frac{3}{2} n p_0 V_0 < 0.$$

Газ на участке 4–1 получает теплоту (давление растёт), на участке 2–3 отдаёт (давление падает).

2. Адиабата 3–4. Теплота не передаётся, $Q_{34} = 0$. Работа газа при расширении по этой кривой от V_0 до nV_0 (в направлении 4→3) равна убыли внутренней энергии. Обозначим её $A_{ад}$:

$$A_{ад} = U_4 - U_3 = \frac{3}{2} (p_4 V_0 - p_3 nV_0).$$

Оно неизвестно, но дальше сократится.



Работа на участке 1–2 — вся площадь под верхней кривой: серая часть $A_{ад}$ (площадь под кривой 4–3) плюс бирюзовая полоска $p_0(n-1)V_0$.

3. Участок 1–2. Первое начало: $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$.

Работа A_{12} — площадь под кривой 1–2. В каждом вертикальном сечении эта кривая выше кривой 4–3 на p_0, поэтому площадь под ней — площадь под кривой 4–3 (это $A_{ад}$) плюс полоска высотой p_0 и шириной $(n-1)V_0$:

$$A_{12} = A_{ад} + p_0\,(n-1)\,V_0.$$

Изменение внутренней энергии с учётом $p_1 = p_4 + p_0$ и $p_2 = p_3 + p_0$:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\,(p_2\,nV_0 - p_1V_0) = \frac{3}{2}\,(p_3\,nV_0 - p_4V_0) + \frac{3}{2}\,p_0\,(n-1)\,V_0$$
$$= -A_{ад} + \frac{3}{2}\,p_0\,(n-1)\,V_0.$$

Складываем: $A_{\text{ад}}$ сокращается, неизвестные p_3, p_4 не нужны:

$$Q_{12} = \left(-A_{\text{ад}} + \frac{3}{2}p_0(n-1)V_0\right) + \left(A_{\text{ад}} + p_0(n-1)V_0\right) = \frac{5}{2}p_0\,(n-1)\,V_0 > 0.$$

4. КПД. Теплоту газ получает на участках 4–1 и 1–2, отдаёт на участке 2–3:

$$Q_+ = Q_{41} + Q_{12} = p_0V_0\Big(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\,(n-1)\Big),$$

$$Q_- = |Q_{23}| = \frac{3}{2}\,n\,p_0V_0.$$

КПД — отношение работы за цикл к полученной теплоте, $\eta = \dfrac{Q_+ - Q_-}{Q_+} = 1 - \dfrac{Q_-}{Q_+}$:

$$\eta = 1 - \frac{1{,}5\,n}{2{,}5\,(n-1) + 1{,}5} = \frac{n-1}{2{,}5\,n - 1} = \frac{2\,(n-1)}{5n-2}.$$

Проверка. Второй способ для работы цикла: из теплот $A = Q_+ - Q_- = p_0V_0(1{,}5 + 2{,}5n - 2{,}5 - 1{,}5n) = p_0V_0\,(n-1)$, как и площадь полоски. Пределы: $n \to 1$ — цикл вырождается, $\eta \to 0$; $n \to \infty$ — $\eta \to \frac{2}{5}$. Второй способ для Q_{12} — по малым участкам: на кривой 1–2 $p = p_{\text{ад}} + p_0$, $dp = dp_{\text{ад}} = -\frac{5}{3}\,p_{\text{ад}}\,\dfrac{dV}{V}$, поэтому $\delta Q = \frac{3}{2}(V\,dp + p\,dV) + p\,dV = \frac{5}{2}\,p_0\,dV > 0$. Сумма даёт $\frac{5}{2}\,p_0(n-1)V_0$; газ получает теплоту на всём участке 1–2, так что Q_+ найдена верно.

Смысл: неизвестная работа по адиабате входит в ΔU_{12} и A_{12} с разными знаками и сокращается.

Ответ. $Q_{41} = 1{,}5\,p_0V_0$; $Q_{23} = -1{,}5\,n\,p_0V_0$ (газ отдаёт); $Q_{12} = 2{,}5\,p_0(n-1)V_0$; $\eta = 1 - \dfrac{1{,}5\,n}{2{,}5\,(n-1) + 1{,}5} = \dfrac{n-1}{2{,}5\,n - 1}$.