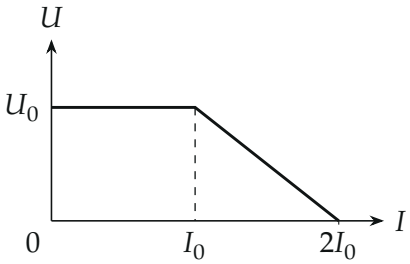
Источник с защитой и конденсатор

Задача 9. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 9] На рисунке показана вольтамперная характеристика источника напряжения. Если сила тока в подключённой к источнику цепи меньше $I_0 = 1$ А, то напряжение на клеммах источника равно $U_0 = 10$ В. Если же сила тока в цепи превышает величину I_0, то в источнике срабатывает защита от перегрузки, и напряжение U на его клеммах начинает убывать с ростом силы тока I по линейному закону, пока при силе тока $2I_0$ (ток короткого замыкания) напряжение U не обращается в ноль.



К клеммам этого источника подключили цепь, состоящую из последовательно соединённых резистора сопротивлением $R_0 = 15$ Ом и незаряженного конденсатора. К моменту, когда конденсатор полностью зарядился, в резисторе выделилось количество теплоты $Q_0 = 12$ мкДж. Затем цепь отсоединили от источника, разрядили конденсатор, заменили резистор на другой с сопротивлением $R_1 = 5$ Ом, и вновь подключили цепь к клеммам источника.

1) Чему равна максимальная сила тока, протекающего в цепях с резисторами R_0 и R_1?
2) Чему равна ёмкость включённого в цепь конденсатора?
3) Какое количество теплоты выделится в резисторе R_1 к моменту полной зарядки конденсатора?

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на зарядку конденсатора от нелинейного источника. По мере зарядки ток падает, и рабочая точка источника движется по ВАХ: в начале ток задаёт пересечение ВАХ с прямой

$U = IR$, в конце ток нулевой и конденсатор заряжен до U_0. Теплоту находим из энергии: работа источника минус энергия конденсатора. С R_0 защита не включается, с R_1 работает в начале.

Обозначения. I — ток, u — напряжение на конденсаторе, $U_{\text{ист}}(I)$ — напряжение источника по ВАХ.

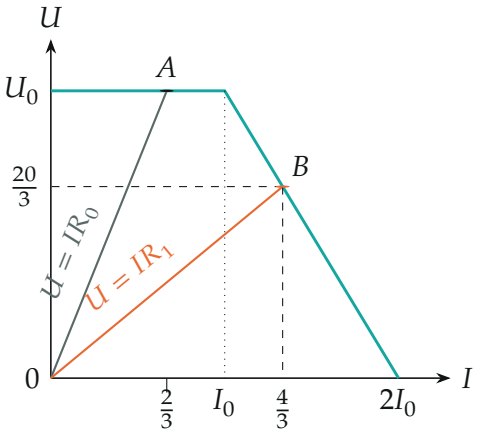
1. Закон для цепи. Второе правило Кирхгофа для контура «источник — резистор R — конденсатор» в любой момент:

$$U_{\text{ист}}(I) = IR + u.$$

u растёт, а ВАХ с ростом I не поднимается, поэтому равенство сохраняется только при убывании I: ток наибольший в начале, при $u = 0$:

$$U_{\text{ист}}(I_{\max}) = I_{\max}R,$$

то есть в точке пересечения ВАХ с прямой $U = IR$.



ВАХ источника (бирюзовая) и прямые $U = IR$ для $R_0 = 15$ Ом (серая) и $R_1 = 5$ Ом (оранжевая). Точки A и B — начало зарядки; I — в амперах, U — в вольтах.

Пункт 1. Максимальный ток. *Резистор* R_0. Пусть источник на го-

ризонтальной части ВАХ:

$$I_{\max}^{(0)} = \frac{U_0}{R_0} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}\text{ А}.$$

$\frac{2}{3}$ А $< I_0$ — предположение верно (точка A).

Резистор R_1. То же предположение даёт $U_0/R_1 = 2$ А $> I_0$ — неверно; точка на наклонной части ВАХ, прямой через $(I_0,\, U_0)$ и $(2I_0,\, 0)$:

$$U_{\text{ист}} = U_0\Big(2 - \frac{I}{I_0}\Big).$$

Приравняем IR_1:

$$I\,R_1 = 2U_0 - \frac{U_0}{I_0}\,I \quad\Rightarrow\quad I_{\max}^{(1)} = \frac{2I_0U_0}{I_0R_1 + U_0} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}\text{ А}.$$

Это между I_0 и $2I_0$ (точка B). Обратите внимание: «ответ» $U_0/R_1 = 2$ А — ловушка: это ток короткого замыкания, при нём напряжение источника нулевое.

Пункт 2. Ёмкость. С R_0 ток меньше I_0, напряжение источника постоянно, U_0. Закон сохранения энергии: источник перенёс заряд CU_0 и совершил работу CU_0^2, конденсатор запас $\frac{CU_0^2}{2}$, остальное — теплота в резисторе:

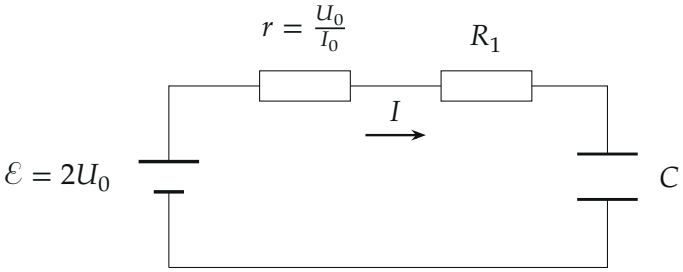
$$Q_0 = CU_0^2 - \frac{CU_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} \quad\Rightarrow\quad C = \frac{2Q_0}{U_0^2} = \frac{2\cdot 12\cdot 10^{-6}}{100} = 0{,}24\text{ мкФ}.$$

Пункт 3. Теплота в R_1. Зарядка идёт в два этапа: пока $I > I_0$, источник на наклонной части, потом — на горизонтальной. Переход при $I = I_0$: $U_0 = I_0R_1 + u_1$,

$$u_1 = U_0 - I_0R_1 = 10 - 5 = 5\text{ В}.$$

Этап 1 (u от 0 до u_1). Наклонная часть $U_{\text{ист}} = 2U_0 - \frac{U_0}{I_0}\,I$ — это источ-

ник с ЭДС $\mathcal{E} = 2U_0 = 20$ В и внутренним сопротивлением $r = \dfrac{U_0}{I_0} = 10$ Ом: обычная зарядка через r и R_1.



Эквивалентная схема наклонной части ВАХ: источник с ЭДС $2U_0$ и внутренним сопротивлением $r = U_0/I_0$, затем R_1 и конденсатор. Годится, пока $I > I_0$ (то есть пока $u < u_1$).

Закон сохранения энергии: ЭДС перенесла заряд Cu_1 (работа $\mathcal{E}Cu_1$), конденсатор запас $\dfrac{Cu_1^2}{2}$, остальное — теплота в r и R_1:

$$Q_{r+R_1} = 2U_0 \cdot Cu_1 - \frac{Cu_1^2}{2} = C\,(100 - 12{,}5)\ \text{В}^2 = 87{,}5\,C = 21\ \text{мкДж}.$$

Ток в r и R_1 один, теплота делится пропорционально сопротивлениям, на R_1 — доля $\dfrac{R_1}{R_1 + r} = \dfrac{1}{3}$:

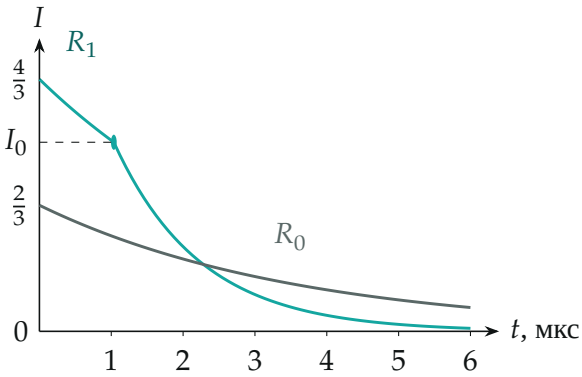
$$Q_A = \frac{1}{3} \cdot 21 = 7\ \text{мкДж}.$$

Этап 2 (u от u_1 до U_0, $\Delta U = U_0 - u_1 = 5$ В), напряжение источника U_0. Источник перенёс заряд $C\,\Delta U$ (работа $U_0 C\,\Delta U$), энергия конденсатора выросла на $\frac{C}{2}(U_0^2 - u_1^2)$:

$$Q_B = C\,\Delta U\,U_0 - \frac{C}{2}\,(U_0 - u_1)(U_0 + u_1)$$
$$= \frac{C\,\Delta U^2}{2} = \frac{0{,}24 \cdot 25}{2} = 3\ \text{мкДж}.$$

Итого:

$$Q_1 = Q_A + Q_B = 7 + 3 = 10\text{ мкДж} = \frac{5}{6}Q_0.$$



Ток при зарядке: с R_1 — бирюзовая линия, с R_0 — серая. У бирюзовой в точке $I = I_0$ излом: до него защита, после — нет.

Проверка. Второй способ для пункта 3 — прямой подсчёт $\int I^2 R_1\,dt$ по токам. На этапе 1 ток спадает экспоненциально с постоянной $\tau_1 = C(r + R_1) = 3{,}6$ мкс от $\frac{4}{3}$ А до 1 А; на этапе 2 — с постоянной $\tau_2 = CR_1 = 1{,}2$ мкс от 1 А. Для экспоненты теплота в R равна $\frac{1}{2}R\tau(I_\text{н}^2 - I_\text{к}^2)$: $Q_A = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3{,}6\cdot\frac{7}{9}$ мкДж $= 7$ мкДж, $Q_B = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 1{,}2\cdot 1$ мкДж $= 3$ мкДж — те же. В общем виде $Q_1 = \dfrac{I_0R_1\,(3U_0 - I_0R_1)}{U_0\,(U_0 + I_0R_1)}\,Q_0$, что при данных числах равно $\frac{5}{6}Q_0$. Предел: при $I_0R_1 = U_0$ защита не включается, и формула даёт $Q_1 = Q_0$.

Смысл: без защиты в резисторе при любом R выделилось бы Q_0; защита ограничивает ток в начале зарядки, и теплоты меньше.

Ответ. 1) $I_\text{max}^{(0)} = \dfrac{U_0}{R_0} = \dfrac{2}{3}$ А, $I_\text{max}^{(1)} = \dfrac{2I_0U_0}{I_0R_1 + U_0} = \dfrac{4}{3}$ А; 2) $C = \dfrac{2Q_0}{U_0^2} =$ 0,24 мкФ; 3) $Q_1 = \dfrac{5}{6}Q_0 = 10$ мкДж.