Муравей в кривом зеркале

Задача 10. [МОШ 2012/13, 11 класс, задача 10]

Глаз наблюдателя расположен так, что муравей и его изображение в «кривом» (сферическом) зеркале для наблюдателя имеют одинаковые угловые размеры и полностью «накладываются» друг на друга. Наблюдатель отодвинулся от зеркала на расстояние L вдоль линии, на которой находятся муравей и его изображение, и теперь видит, что угловой размер муравья составляет 75% от углового размера его изображения. Затем наблюдатель отодвинулся в том же направлении ещё на L, и угловой размер изображения стал в 1,5 раза больше углового размера муравья. Во сколько раз изображение муравья больше его самого? Каков радиус кривизны зеркала?

▲ **Решение. Что происходит.** Угловой размер маленького предмета, перпендикулярного линии взгляда, равен его размеру, делённому на расстояние от глаза. Муравей и изображение стоят поперёк одной линии (оси), глаз сидит на ней же. Когда глаз отъезжает на L, расстояния до муравья и до изображения увеличиваются на одно и то же L, но отношение угловых размеров меняется, потому что расстояния разные. Наблюдаемые отношения $\frac{3}{4}$ и 1,5 дают два уравнения на два расстояния. Потом остаётся формула зеркала.

Обозначения. h — размер муравья, H — размер изображения, $\Gamma = H/h$ — искомое увеличение. ℓ_1 и ℓ_2 — расстояния от глаза в первом положении до муравья и до изображения; $x = \ell_1/L$, $y = \ell_2/L$. Глаз находится по ту же сторону от предметов, что и зеркало, и отодвигается от них.

Шаг 1. Первое положение глаза. Угловые размеры муравья и изображения равны:

$$\frac{h}{\ell_1} = \frac{H}{\ell_2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{y}{x}.$$

Шаг 2. Глаз отодвинулся на L. Расстояния стали $\ell_1 + L$ и $\ell_2 + L$. Угловой размер муравья составляет $75\% = \frac{3}{4}$ углового размера изображения,

то есть изображение больше в $\frac{4}{3}$ раза:

$$\frac{H/(\ell_2+L)}{h/(\ell_1+L)} = \Gamma\,\frac{\ell_1+L}{\ell_2+L} = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}\cdot\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad 3y = xy + 4x.$$

Шаг 3. Глаз отодвинулся ещё на L**.** Расстояния $\ell_1 + 2L$ и $\ell_2 + 2L$, изображение больше муравья в 1,5 раза:

$$\Gamma\,\frac{\ell_1+2L}{\ell_2+2L} = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}\cdot\frac{x+2}{y+2} = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad 4y = xy + 6x.$$

Шаг 4. Увеличение. Вычтем уравнение шага 2 из уравнения шага 3: $y = 2x$. Тогда

$$\Gamma = \frac{y}{x} = 2,$$

и из $3y = xy + 4x$: $6x = 2x^2 + 4x$, откуда $x = 1$ (корень $x = 0$ не подходит), $y = 2$. Значит, $\ell_1 = L$, $\ell_2 = 2L$: изображение дальше от глаза, чем муравей, в два раза (рис. 1).

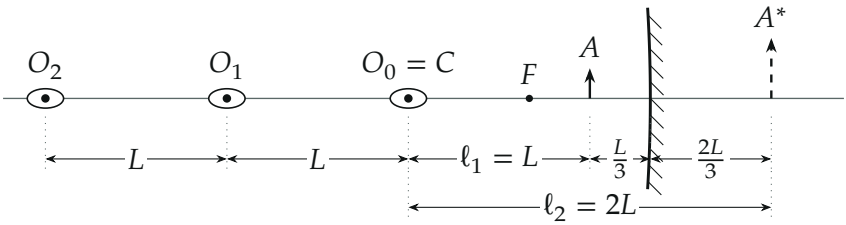


Рис. 1. Положения глаза O_2, O_1, O_0 (соседние на расстоянии L), муравей A и его мнимое изображение A^* за зеркалом, фокус F, центр кривизны C. Рисунок построен по найденному ответу; по вертикали масштаб увеличен.

Шаг 5. Расстояние до зеркала. Пусть муравей на расстоянии d от зеркала, а изображение на расстоянии b от него; увеличение сферического зеркала $\Gamma = b/d$, поэтому $b = 2d$. Изображение дальше от глаза, чем муравей. Действительное изображение лежало бы перед зеркалом, дальше от зеркала, чем муравей ($b = 2d > d$), то есть ближе к глазу, чем муравей, а у нас наоборот. Значит, изображение мнимое и находится за

зеркалом (рис. 2). Расстояние от первого положения глаза до зеркала D:

$$D - d = \ell_1 = L, \qquad D + b = D + 2d = \ell_2 = 2L,$$

$$3d = L \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{3}, \qquad D = \frac{4L}{3}.$$

Шаг 6. Радиус кривизны. Формула вогнутого зеркала для мнимого изображения (изображение за зеркалом, расстояние b): $\frac{1}{d} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$. При $b = 2d$:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} = \frac{1}{2d} \quad \Rightarrow \quad F = 2d = \frac{2L}{3}, \qquad R = 2F = \frac{4L}{3}.$$

Муравей лежит между зеркалом и фокусом ($d = \frac{L}{3} < F = \frac{2L}{3}$), поэтому изображение прямое, мнимое и увеличенное — как и получилось.

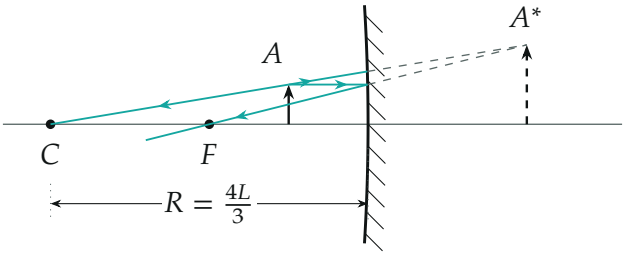


Рис. 2. Ход лучей от вершины муравья в вогнутом зеркале: луч, параллельный оси, отражается через фокус F, луч через центр кривизны C возвращается по себе. Продолжения лучей за зеркалом пересекаются в вершине мнимого изображения A^*.

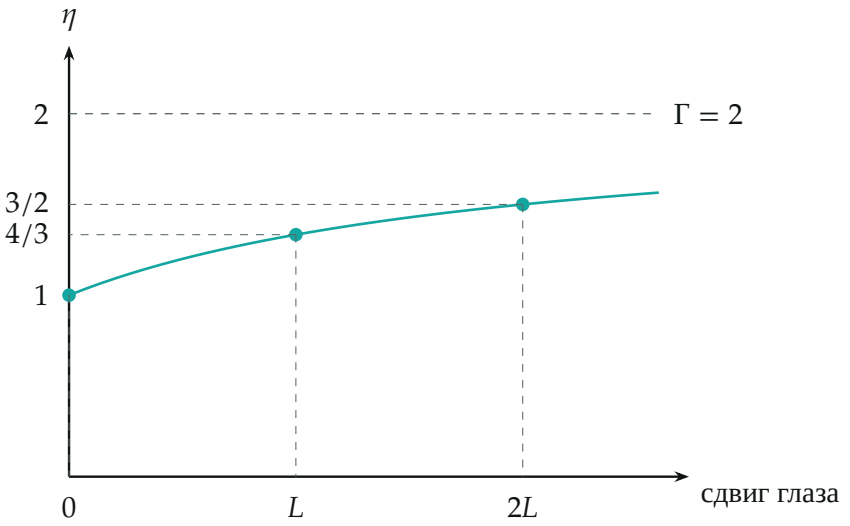


Рис. 3. Отношение угловых размеров изображения и муравья $\eta = 2\frac{1+t}{2+t}$ в зависимости от сдвига глаза t (в единицах L): $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$ в трёх положениях, предел — $\Gamma = 2$.

Обратите внимание. Угловой размер муравья относится к угловому размеру изображения как $\frac{3}{4}$, а изображение больше муравья в $\frac{4}{3}$ раза: перепутать дробь — значит получить другие уравнения. И отношение угловых размеров при отодвигании не остаётся равным 1: оно растёт от 1 к $\Gamma = 2$ (рис. 3), потому что расстояния до муравья и до изображения увеличиваются на одно и то же L, а не в одно и то же число раз.

Проверка. Размерность: Γ безразмерна, R имеет размерность длины. Подстановка: после первого сдвига $2 \cdot \frac{1+1}{2+1} = \frac{4}{3}$, после второго $2 \cdot \frac{1+2}{2+2} = \frac{3}{2}$ — как в условии. Геометрическая проверка: $R = \frac{4L}{3} = D$, то есть в первом положении глаз стоит в центре кривизны C зеркала. Луч из центра кривизны падает на зеркало по нормали и возвращается назад, поэтому луч глаза, идущий через вершину муравья, идёт и через вершину изображения (рис. 2): угловые размеры равны, как и сказано в условии.

Ответ. Изображение больше муравья в 2 раза; радиус кривизны зеркала $R = \frac{4L}{3}$.