# Робот Кузя

**Задача 1.** [МОШ 2012/13, 7 класс, задача 1] На прямой в точке $A$ находится пункт отправления робота Кузи, который может перемещаться вдоль прямой от точки $A$ до точки $D$ с одинаковой скоростью $V$, модуль которой равен 0,5 м/с. Программа управления робота позволяет изменять направление скорости Кузи только в точках $A$, $B$, $C$ и $D$, причем $AB = BC = CD = 300$ м. Кроме того, программа предусматривает, что через каждый час Кузя должен возвращаться в точку $A$. При прохождении точек $B$, $C$ и $D$ срабатывает замыкающий элемент, который зажигает наградную светодиодную лампочку на корпусе Кузи. Зажженные лампочки горят во все время его движения. Известно, что последовательность прохождения точек, зажигающих наградные лампочки, в каждом часе была различной. Определите количество наград на корпусе Кузи через пять часов после старта из точки $A$.




*Рисунок условия: схема пути робота Кузи (на рисунке организаторов рядом с точкой A нарисован сам робот)*

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость Кузи постоянна по модулю, значит, путь за час известен заранее. Дальше задача комбинаторная: нужно перечислить все возможные маршруты за один час и понять, что при условии «в каждом часе последовательность разная» Кузя за пять часов проходит каждый возможный маршрут ровно по разу.

**Обозначения.** $s$ — путь за один час, $N$ — число отрезков по 300 м в этом пути, $n$ — число лампочек, зажжённых за один час.

**1. Сколько отрезков проходит Кузя за час.** Путь при равномерном движении равен скорости, умноженной на время:

$$s = Vt = 0{,}5 \text{ м/с} \cdot 3600 \text{ с} = 1800 \text{ м}, \qquad N = \frac{s}{300 \text{ м}} = 6.$$

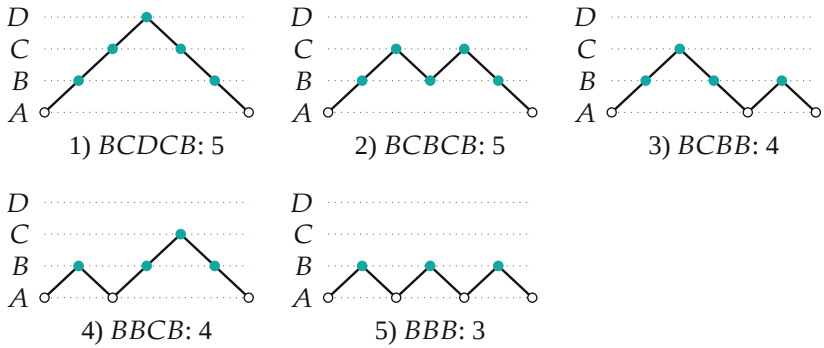
Значит, за час Кузя проходит ровно шесть отрезков («шагов») по 300 м. Менять направление он может только в точках $A$, $B$, $C$, $D$, поэтому каж-

дый его маршрут — набор из шести таких шагов, а в конце часа он обязан быть в $A$.

**2. Какие маршруты возможны.** Занумеруем точки номерами $0, 1, 2, 3$ (точка $A$ — 0, $B$ — 1 и так далее). Каждый шаг меняет номер на $+1$ или $-1$, начало и конец — номер 0, левее $A$ и правее $D$ ехать нельзя. Из $A$ первый шаг один: в $B$. Перебор по месту, где Кузя впервые возвращается в $A$, и по тому, как далеко он заходит, даёт пять маршрутов (рисунок ниже, по горизонтали — номер шага, по вертикали — точка, бирюзовые кружки — зажжённые лампочки, пустые — заход в $A$, лампочки не зажигающий):

1. $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$: проходит $B, C, D, C, B$ — 5 лампочек;
2. $A \to B \to C \to B \to C \to B \to A$: $B, C, B, C, B$ — 5 лампочек;
3. $A \to B \to C \to B \to A \to B \to A$: $B, C, B, B$ — 4 лампочки (посреди часа Кузя возвращается в $A$);
4. $A \to B \to A \to B \to C \to B \to A$: $B, B, C, B$ — 4 лампочки;
5. $A \to B \to A \to B \to A \to B \to A$: $B, B, B$ — 3 лампочки.

Других нет. Дойдя до $D$ за три шага, Кузя тремя оставшимися может лишь вернуться в $A$ — это маршрут 1. Без захода в $D$ он ездит только между $A$, $B$, $C$ и успевает за три «туда» и три «обратно» шага: либо дважды заходит в $C$ (маршрут 2), либо один раз (маршруты 3 и 4, в зависимости от того, до или после захода в $C$ он возвращается в $A$), либо ни разу (маршрут 5).




1) $BCDCB$: 5 2) $BCBCB$: 5 3) $BCBB$: 4

4) $BBCB$: 4 5) $BBB$: 3

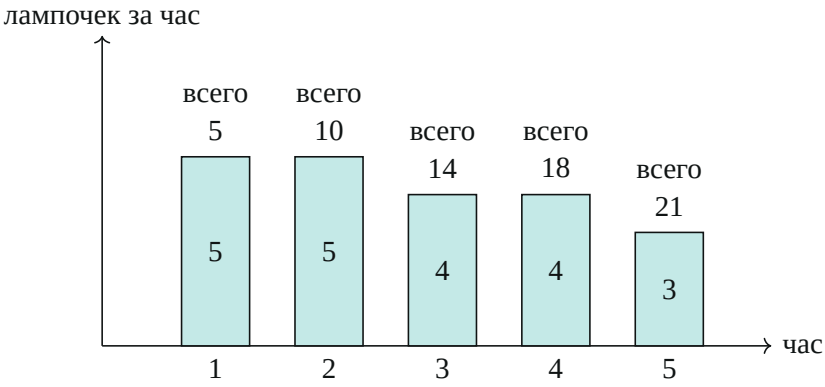
*Пять возможных маршрутов за час: под каждым — порядок зажигания лампочек и их число*

**3. Все пять часов — разные маршруты.** По условию последовательности точек, зажигающих лампочки, в разных часах различны. Все пять маршрутов дают различные последовательности (*BCDCB*, *BCBCB*, *BCBB*, *BBCB*, *BBB*), а часов тоже пять. Значит, Кузя прошёл каждый маршрут ровно по разу.

**4. Число наград.** Сложим лампочки по часам:

$$N_{\text{лампочек}} = 5 + 5 + 4 + 4 + 3 = 21.$$

По часам это видно на рисунке ниже.




*Пять часов — пять разных маршрутов: в столбике число лампочек за час, над ним — накопленная сумма; к концу пятого часа* $5 + 5 + 4 + 4 + 3 = 21$.

**Обратите внимание.** Точка $A$ лампочку не зажигает, поэтому заходы в $A$ посреди часа (маршруты 3–5) только уменьшают число лампочек. Лампочка загорается при каждом прохождении точки, в том числе при повторном.

**Проверка.** Кузя заканчивает час в $A$, а каждый из шести шагов приводит его в какую-то точку. Лампочка зажигается в тех точках, куда он пришёл не в $A$, поэтому $n = 6 - k$, где $k$ — число приходов в $A$ (включая последний). У маршрутов 1 и 2 $k = 1$ и $n = 5$, у 3 и 4 $k = 2$ и $n = 4$, у маршрута 5 $k = 3$ и $n = 3$ — числа сходятся с рисунком. Перебор

на компьютере всех путей длины 6 по точкам 0..3 тоже даёт ровно пять замкнутых маршрутов с этими числами лампочек.

Смысл: условие «каждый час по-разному» не оставляет Кузе выбора, поэтому итог — сумма по всем возможным маршрутам.

**Ответ.** 21 лампочка.