Графитовый карандаш

Задача 2. [МОШ 2012/13, 7 класс, задача 2] В XVI веке мощная буря, прошедшая по Англии в местности Камберленд, вывернула с корнями деревья, и тогда местные пастухи обнаружили в обнажившейся земле под вывернутыми корнями некую тёмную массу, которую они посчитали углём, который поджечь, однако, не удалось. Это был графит. В дальнейшем из него начали производить тонкие заострённые на конце палочки и использовали их для рисования. Эти палочки были мягкими, пачкали руки и подходили только для рисования, но не для письма.

Столяр Каспар Фабер начал с 1761 года свое производство деревянных карандашей, что послужило началом истории фирмы Faber-Castell.

Карандаши различаются по твёрдости грифеля. Грифель карандаша средней твёрдости имеет плотность 2,1 г/см^3, плотность деревянной оболочки 0,72 г/см^3. Стандартная длина карандаша 17,5 см. Самый простой из всех простых карандашей имеет круглое сечение. Используя приведённый рисунок поперечного сечения такого карандаша на миллиметровой бумаге, определите его среднюю плотность.

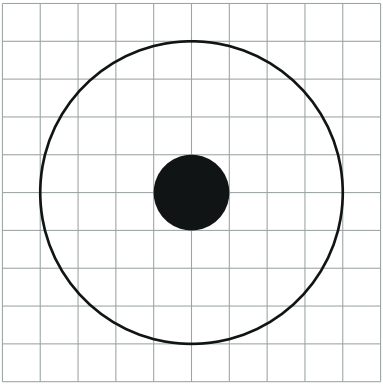


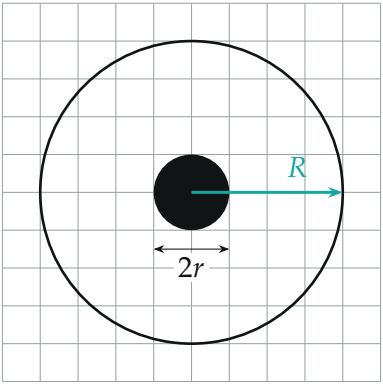
Рисунок условия: сечение карандаша на клетчатой бумаге

▲ **Решение. Что происходит.** Карандаш — цилиндр из двух частей: грифель внутри и деревянная оболочка снаружи. Средняя плотность тела — это полная масса, делённая на полный объём. Объёмы частей относятся как площади их сечений (длина у всех частей одна), а площади

кругов — как квадраты радиусов. Радиусы мы возьмём прямо с клетчатого рисунка.

Обозначения. R и r — радиусы всего карандаша и грифеля, S и $S_г$ — площади сечений карандаша и грифеля, l — длина карандаша, V, $V_г$, $V_д$ — объёмы карандаша, грифеля и дерева, $\rho_г = 2{,}1$ г/см^3, $\rho_д = 0{,}72$ г/см^3, ρ — средняя плотность.

1. Радиусы по клеткам. Внешняя окружность касается линий сетки, расположенных на 4 клетки левее и правее центра: её диаметр 8 клеток, $R = 4$ клетки. Чёрный круг грифеля занимает ровно две клетки по ширине: его диаметр 2 клетки, $r = 1$ клетка. Размер клетки сам по себе не нужен: он сократится.

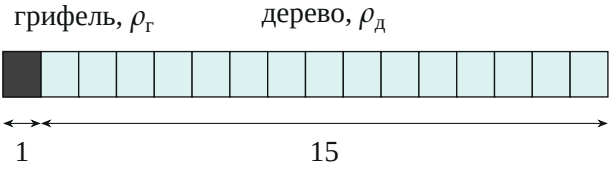


Радиус карандаша $R = 4$ клетки, диаметр грифеля $2r = 2$ клетки

2. Какую долю сечения занимает грифель. Площадь круга $\pi \times (\text{радиус})^2$, поэтому

$$\frac{S_г}{S} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Весь карандаш разобьём на 16 равных долей сечения: 1 доля — грифель, остальные 15 — дерево.



Сечение как 16 равных долей: тёмная — грифель, светлые — дерево

3. Средняя плотность. Масса тела равна произведению плотности на объём ($m = \rho V$). Масса карандаша складывается из масс грифеля и дерева, а объём — из объёмов:

$$\rho = \frac{m_г + m_д}{V} = \frac{\rho_г V_г + \rho_д V_д}{V}.$$

Длина l у всех частей одинакова, поэтому $V_г = S_г l = \frac{1}{16}V$ и $V_д = \frac{15}{16}V$. Объём V и длина $l = 17{,}5$ см сокращаются — они в задаче лишние:

$$\rho = \frac{1}{16}\rho_г + \frac{15}{16}\rho_д = \frac{2{,}1 + 15 \cdot 0{,}72}{16}\ \text{г/см}^3$$
$$= \frac{2{,}1 + 10{,}8}{16}\ \text{г/см}^3 = \frac{12{,}9}{16}\ \text{г/см}^3.$$

Получаем $\rho = 0{,}80625$ г/см^3. Переведём: 1 г/см^3 $= 1000$ кг/м^3, поэтому $\rho \approx 806$ кг/м^3.

Обратите внимание. Складывать надо массы (или объёмы с весами), а не плотности: среднее арифметическое $(2{,}1 + 0{,}72)/2$ было бы верно только при равных объёмах грифеля и дерева.

Проверка. Средняя плотность лежит между 0,72 и 2,1 г/см^3 и ближе к плотности дерева, которого по объёму 15 из 16 долей — так и вышло. Второй способ: возьмём 16 см^3 карандаша, тогда грифеля 1 см^3 массой 2,1 г, дерева 15 см^3 массой 10,8 г, всего 12,9 г на 16 см^3 — то же самое.

Смысл: средняя плотность — взвешенное по объёму среднее плотностей частей, а веса дают квадраты радиусов.

Ответ. $\rho \approx 806$ кг/м^3.