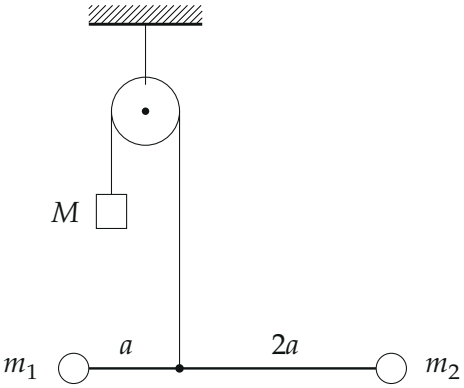
Стержень с грузами и блок

Задача 3. [МОШ 2012/13, 8 класс, задача 3] На рисунке изображен легкий жесткий стержень длиной $3a$, к которому на расстоянии a от одного из концов прикреплена невесомая нить, перекинутая через блок. К противоположному концу нити прикреплен груз массой $M = 3$ кг. К концам стержня прикреплены грузы 1 и 2. Найдите массы m_1 и m_2 этих грузов, если система находится в равновесии, и трения в оси блока нет.



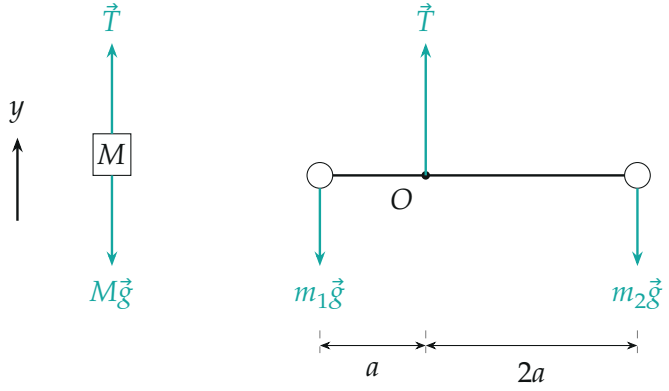
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие твёрдого тела: стержень покоится, значит, равна нулю сумма сил на него и сумма моментов сил относительно любой точки. Силу, которой нить тянет стержень, определяет груз M: нить невесомая, блок без трения, поэтому натяжение вдоль всей нити одинаково и равно весу M. Остаётся записать два условия равновесия стержня и решить систему для m_1 и m_2.

Обозначения. T — сила натяжения нити; O — точка, где нить прикреплена к стержню (a от левого конца, $2a$ от правого); ось y направим вертикально вверх; g — ускорение свободного падения.

1. Груз M. Он неподвижен, на него действуют сила тяжести $M\vec{g}$ вниз и сила натяжения нити $\vec{T}$ вверх. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось y:

$$0 = T - Mg \;\Rightarrow\; T = Mg.$$

2. Что нить делает со стержнем. Нить невесома и перекинута через блок без трения, поэтому по обе стороны от блока её натяжение одинаково. Значит, к стержню в точке O приложена направленная вверх сила $\vec{T}$ с тем же модулем $T = Mg$.



Слева груз M в равновесии; справа силы на лёгкий стержень (стержень невесом, его силы тяжести нет).

3. Равенство нулю суммы сил на стержень. На стержень действуют $\vec{T}$ вверх, $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ вниз. Проекция на ось y:

$$T - m_1 g - m_2 g = 0 \;\Rightarrow\; m_1 + m_2 = M.$$

4. Равенство нулю суммы моментов относительно точки O. Зачем именно O: плечо силы $\vec{T}$ относительно O равно нулю, и эта сила в уравнение не входит. Плечи сил тяжести грузов (расстояния до вертикальных линий действия): a у груза 1 и $2a$ у груза 2. Груз 1 стремится повернуть стержень против часовой стрелки, груз 2 — по часовой, моменты равны по модулю:

$$m_1 g \cdot a = m_2 g \cdot 2a \;\Rightarrow\; m_1 = 2m_2.$$

Груз дальше от точки подвеса вдвое легче: рычаг в 2 раза длиннее, а сила нужна в 2 раза меньше.

5. Решение системы. Подставляем $m_1 = 2m_2$ в $m_1 + m_2 = M$: $3m_2 = M$,

$$m_2 = \frac{M}{3} = 1 \text{ кг}, \qquad m_1 = \frac{2M}{3} = 2 \text{ кг}.$$

Проверка. Второй способ — моменты относительно левого конца стержня: сила T создаёт момент Ta, груз 2 действует с плечом $3a$ и $m_2 g \cdot 3a = Mg \cdot a$, откуда $m_2 = M/3$; моменты относительно правого конца дают $m_1 g \cdot 3a = Mg \cdot 2a$ и $m_1 = 2M/3$. Сошлось с первым способом. Размерность: m_1, m_2 получены как доли M, то есть в килограммах. Предельный смысл: чем ближе нить к левому концу, тем тяжелее должен быть левый груз, и тем больше его доля в M.

Ответ. $m_1 = \dfrac{2M}{3} = 2$ кг, $m_2 = \dfrac{M}{3} = 1$ кг.