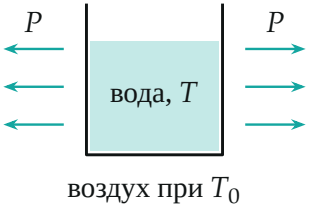
Охлаждение воды на морозе

Задача 4. [МОШ 2012/13, 8 класс, задача 4] Школьник Владислав исследует охлаждение воды в стакане на морозе. Владислав заметил, что охлаждение от температуры 91 °C до 89 °C происходит за 3 минуты, а от температуры 31 °C до 29 °C — за 6 минут. Чему равна температура окружающей среды? Считайте, что мощность теплоотдачи пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды.



Поясняющий рисунок: стакан с водой отдаёт теплоту воздуху с мощностью P, которая пропорциональна $T - T_0$.

▲ **Решение. Что происходит.** Стакан с водой остывает, теряя теплоту в окружающий воздух. Чем он горячее по сравнению с воздухом, тем быстрее остывает: скорость остывания пропорциональна разности температур $T - T_0$. Значит, по скорости остывания при двух разных температурах можно найти температуру воздуха T_0, при которой остывание прекратилось бы.

Обозначения. T — температура воды в стакане, T_0 — температура окружающей среды, C — теплоёмкость стакана с водой, α — коэффициент в законе теплоотдачи $P = \alpha(T - T_0)$ (его значение неизвестно, и оно сократится). Температуры измеряем в градусах Цельсия: уравнения содержат только разности, поэтому переходить в кельвины не нужно.

1. Закон сохранения энергии за малое время. Стакан остывает на ΔT за время τ: вся отданная им теплота $C\Delta T$ уходит в воздух с мощностью P, то есть

$$C\,\Delta T = P\tau = \alpha\,(T - T_0)\,\tau.$$

Зачем средняя температура: за 3 минуты температура меняется только на 2 градуса при разности с воздухом около 120 градусов, поэтому мощ-

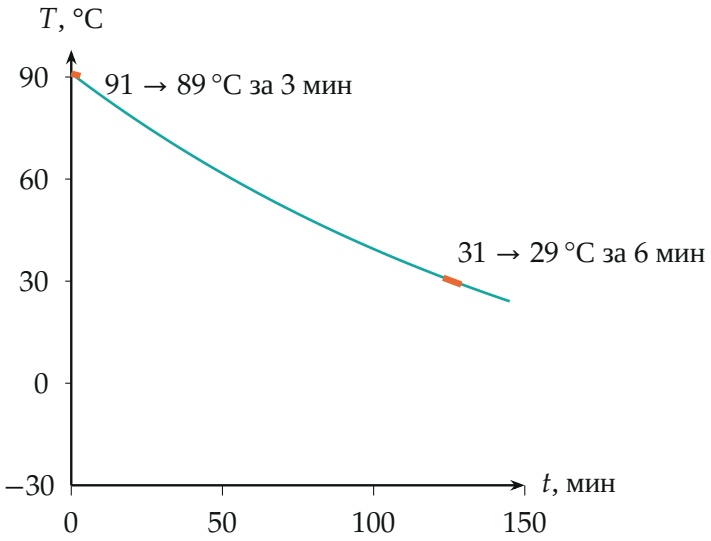
ность почти постоянна и равна значению при средней температуре интервала.

2. Первое измерение. Средняя температура 90 °C, $\Delta T = 2$ °C, $\tau_1 = 3$ мин:

$$C \cdot 2 = \alpha\,(90 - T_0) \cdot 3.$$

3. Второе измерение. Средняя температура 30 °C, $\Delta T = 2$ °C, $\tau_2 = 6$ мин:

$$C \cdot 2 = \alpha\,(30 - T_0) \cdot 6.$$



Кривая остывания $T(t) = T_0 + (91 - T_0)\,e^{-t/\tau}$ при $T_0 = -30$ °C; ось времени совпадает с уровнем T_0, к которому температура приближается. Красным — два измеренных участка.

4. Деление уравнений. Обе левые части равны $2C$, поэтому равны и правые:

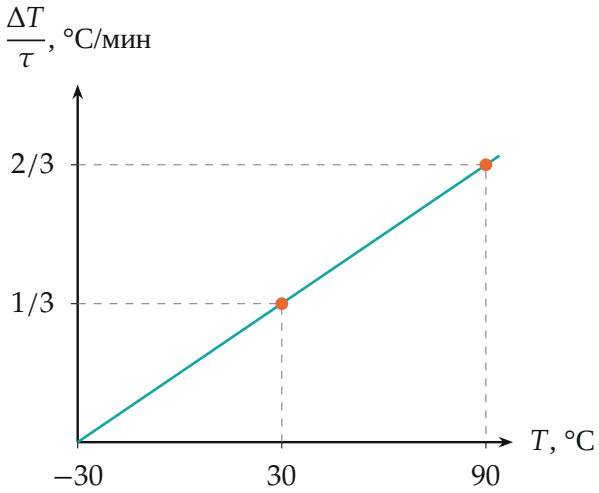
$$\alpha(90 - T_0) \cdot 3 = \alpha(30 - T_0) \cdot 6 \;\Rightarrow\; 90 - T_0 = 2\,(30 - T_0).$$

Коэффициент α и теплоёмкость C сократились: знать их не нужно.

5. Решение. $90 - T_0 = 60 - 2T_0$, откуда

$$T_0 = -30\,^\circ\text{C}.$$

Обратите внимание. Температуры в условии — в градусах Цельсия, а скорость остывания пропорциональна не самой температуре, а её разности с воздухом. Поэтому остывание на тех же 2 градуса при 30 °C идёт вдвое медленнее, чем при 90 °C: разность $30 - T_0 = 60$ вдвое меньше, чем $90 - T_0 = 120$.



Скорость остывания $\Delta T/\tau$ как функция температуры — прямая; две измеренные точки (красные) определяют её, а нуль скорости приходится на $T_0 = -30\,^\circ C$.

Проверка. Второй способ — построение по рисунку. Скорости остывания $2/3$ и $1/3$ °C/мин при температурах 90 и 30 °C лежат на прямой, потому что скорость пропорциональна $T - T_0$. Прямая через эти две точки проходит через нуль скорости при $T_0 = -30\,^\circ$C: при падении температуры на 60 градусов скорость падает вдвое, на следующие 60 градусов — до нуля. Дополнительная проверка точным законом (экспонента,

без замены на среднюю температуру):

$$\frac{1}{3}\ln\frac{91-T_0}{89-T_0}=\frac{1}{6}\ln\frac{31-T_0}{29-T_0}$$

даёт численно $T_0 = -30{,}008\,^\circ\mathrm{C}$, то есть отличие от -30 в тысячных долях градуса.

Ответ. Температура окружающей среды $-30\,^\circ\mathrm{C}$.