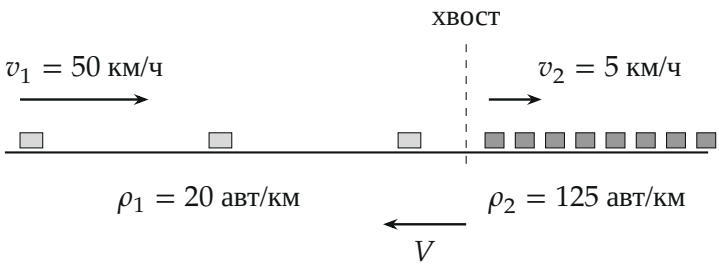
Хвост автомобильной пробки

Задача 5. [МОШ 2012/13, 8 класс, задача 5] С какой скоростью растет «хвост» автомобильной пробки, образовавшейся из-за резкого снижения скорости на некотором участке дороги? До пробки автомобили движутся однородным потоком со скоростью 50 км/ч со средней плотностью 20 автомобилей на 1 км пути. В пробке скорость автомобилей снижается до 5 км/ч, и движутся они почти вплотную друг к другу со средней плотностью 125 автомобилей на 1 км пути.



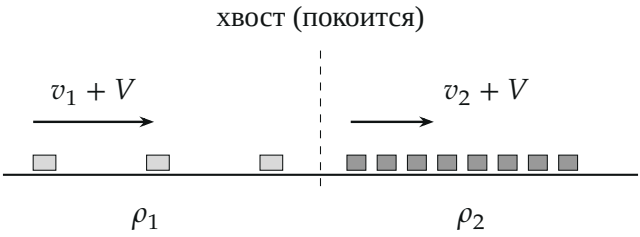
Поясняющий рисунок: поток с редкими машинами слева, пробка с плотными машинами справа; граница между ними — «хвост», он сдвигается влево со скоростью V (не в масштабе).

▲ **Решение. Что происходит.** Машины подъезжают к хвосту пробки со скоростью v_1, въезжают в неё и дальше движутся со скоростью v_2, гораздо меньшей. Каждая машина, попавшая в пробку, занимает меньше дороги, чем в свободном потоке, поэтому машины накапливаются у хвоста, и он отодвигается назад, навстречу потоку. Скорость хвоста находим из условия, что машины не исчезают и не возникают: сколько машин пересекло хвост со стороны потока, столько же оказалось в пробке.

Обозначения. $v_1 = 50$ км/ч — скорость потока до пробки, $\rho_1 = 20$ авт/км — плотность потока (число машин на километр); $v_2 = 5$ км/ч, $\rho_2 = 125$ авт/км — то же в пробке; V — скорость хвоста относительно дороги, направленная против потока. Ось x направим по ходу потока.

1. Перейдём в систему отсчёта хвоста. В ней хвост стоит на месте, а дорога вместе со всеми машинами смещается вперёд со скоростью

V (в системе дороги хвост едет назад). Поэтому поток приближается к хвосту со скоростью $v_1 + V$, а машины пробки, которые едут вперёд со скоростью v_2, удаляются от хвоста со скоростью $v_2 + V$.



В системе хвоста: слева поток плотностью ρ_1 со скоростью $v_1 + V$, справа пробка плотностью ρ_2 со скоростью $v_2 + V$.

2. Сколько машин пересекает хвост. За малое время τ со стороны потока хвост пересекают все машины, стоявшие перед ним на расстоянии меньше $(v_1 + V)\tau$: их число

$$N_1 = \rho_1(v_1 + V)\tau.$$

С другой стороны, эти же машины оказываются в пробке и удаляются от хвоста со скоростью $v_2 + V$: за время τ они занимают участок длиной $(v_2 + V)\tau$ с плотностью ρ_2, их число

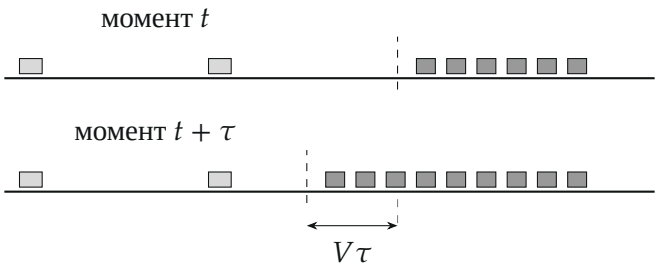
$$N_2 = \rho_2(v_2 + V)\tau.$$

Машины не появляются и не исчезают, поэтому $N_1 = N_2$ (закон сохранения числа машин). Время τ сокращается:

$$\rho_1(v_1 + V) = \rho_2(v_2 + V).$$

3. Решаем для V. Раскрываем скобки: $\rho_1 v_1 + \rho_1 V = \rho_2 v_2 + \rho_2 V$, откуда $V(\rho_2 - \rho_1) = \rho_1 v_1 - \rho_2 v_2$ и

$$V = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{20 \cdot 50 - 125 \cdot 5}{125 - 20}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{375}{105}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \approx 3{,}6\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$



Хвост сдвинулся на $V\tau$ назад: участок длиной $V\tau$, где было $\rho_1 V\tau$ машин, стал частью пробки и вмещает $\rho_2 V\tau$ (не в масштабе).

Обратите внимание. Скорость хвоста V направлена против потока, поэтому к скорости v_1 она прибавляется, а не вычитается: относительно хвоста поток быстрее. Если бы хвост двигался по потоку, формула была бы другой.

Проверка. Второй способ — счёт в системе дороги. За время τ участок длиной $V\tau$ из потока превращается в пробку: машин на нём было $\rho_1 V\tau$, стало $\rho_2 V\tau$, прибавка $(\rho_2 - \rho_1)V\tau$. Она набралась из того, что поток привёз $\rho_1 v_1 \tau$ машин, а пробка выпустила вперёд $\rho_2 v_2 \tau$. Так что $(\rho_2 - \rho_1)V = \rho_1 v_1 - \rho_2 v_2$, то же самое уравнение. Размерность: [авт/км · км/ч]/[авт/км] = км/ч. Предельные случаи: при $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ (поток через хвост не меняется) $V = 0$ — пробка не растёт и не рассасывается; при $\rho_1 v_1 > \rho_2 v_2$ (в пробку приезжает больше машин, чем выезжает) $V > 0$ — хвост растёт назад; здесь $1000 > 625$ авт/ч, и V положительна, как должно быть.

Ответ. Хвост пробки растёт со скоростью $V = \dfrac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_2 - \rho_1} \approx 3{,}6$ км/ч.